



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



مرور و تثبیت پایه دهم



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۷ شهریورماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- ✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان – حسین شفیع زاده سیدجواد نظری – محمد خانگلدی کاظم اجلالی – محمدپورسعید محمد رضا حسینی فرد – سوگند روشنی کیوان دارابی – رسول حاجی زاده	حمیدرضا ولی پور مائده بادان فیروز علیرضا ملک حسینی
فیزیک	سجاد صادقی زاده	سجاد صادقی زاده – محمدجواد سورچی حسین عبدوی نژاد – مجید رجبی وندچالی مهدی پارسا – ارسلان رحمانی – محمد باغبان محسن قندچلر – آروین صالحی	حنا خلعتبری
شیمی	علی ترابی	علی ترابی – مهسا بایمانی نژاد پرهام تیزپا	منیب نظری امیر بصراوی محمد داودآبادی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

اتفاقات شناختی احتمالی در جلسه آزمون و راه‌های مدیریت آن

اتفاقات شناختی چیزایی هستن که مستقیم با یادگیری و مغزت در ارتباطن؛ مثل حافظه، تمرکز، تصمیم‌گیری و این اتفاقات ممکنه برای هر کسی توی جلسه کنکور رخ بدن. فرق رتبه‌برترها با بقیه در این نیست که براشون پیش نیاد، بلکه در اینه که بلدن چطور مدیریتش کنن.

اینجا ۵ اتفاق مهم رو بررسی می‌کنیم و برای هر کدوم، هم **راه‌حل فوری** (توی همون لحظه) می‌گیم، هم **راه‌حل مهارتی** (با تمرین قبل از کنکور).

۱ فراموشی آنی (احساس خالی شدن ذهن)

ناگهان حس می‌کنی همه‌چی یادت رفته. حتی ساده‌ترین فرمول‌ها برات غریبه می‌شن. این حالت بیشتر به خاطر اضطراب و ترشح آدرنالینه که حافظه کوتاه‌مدت رو موقتاً مختل می‌کنه.

چطور مدیریتش کنم؟

- **نفس عمیق:** مداد رو بذار زمین، چشمتو ببند و ۳ تا ۵ بار عمیق نفس بکش.
- **تغییر موقت:** از اون سؤال بگذر و یکی آسون‌تر رو جواب بده تا اعتماد به نفس برگرده.
- **یادآوری زمینه‌ای:** سعی کن موقعیت مطالعات رو به یاد بیاری (مثلاً پشت میزت یا کتابخونه). این تصویر گاهی جرقه یادآوری رو می‌زنه.

چیکار کنم پیش نیاد؟

با کاهش استرس. استرس مثل تاریکی باغه: وقتی چیزی رو نمی‌بینی، هر صدایی برات ترسناک میشه. ولی اگه چراغی همراهت باشه، ترست می‌ریزه. مسیر کنکور هم برای خیلی‌ها تاریک و مبهمه، اما ما توی ماز سعی کردیم چراغ دستت بدیم تا راهو ببینی. چون این مسیر رو هم خودمون رفتیم، هم بارها با بچه‌ها طی کردیم و می‌دونیم ته باغ به یه کلبه روشن و گرم می‌رسی.

۲ حواس‌پرتی و کاهش تمرکز

وسط حل سؤال، فکرت می‌ره سمت نتیجه کنکور، سؤال قبلی، یا حتی صدای سالن.

چطور مدیریتش کنم؟

- **تکنیک "اینجا و اکنون":** به خودت بگو «فقط همین یک سؤال مهمه».
- **یادداشت کردن:** اگه فکری ذهنتو درگیر کرد، یه کلمه کلیدی حاشیه دفترچه بنویس و بذار بعداً برگردی سراغش.

چیکار کنم پیش نیاد؟

با تکنیک رکورد زدن. به جای اینکه بگی «من تمرکز ندارم»، مدت تمرکزت رو مثل رکورد ورزشی بالا ببر. امروز ۱۰ دقیقه، فردا ۱۵، بعد ۲۰ و توقع یک‌باره یک ساعت تمرکز نداشته باش.

یهو ذهنت می‌ره سمت بدترین سناریو: «اگه این تستو غلط بزنی چی؟»، «رتبه‌م خراب میشه».

چطور مدیریتش کنم؟

■ **توقف فکر:** توی ذهنت محکم بگو «بسه!».

■ **جایگزینی افکار:** بگو «حتی رتبه یک هم همه رو درست نزد»، یا «این فقط یه مسابقه‌ست».

■ **تمرکز روی فرآیند:** به جای رتبه، حواستو بذار روی کار درست: خوندن دقیق، مدیریت زمان، حل مرحله به مرحله.

چیکار کنم پیش نیاد؟

کتابای انگیزشی بخون، روش مطالعات رو اصلاح کن و به جای غرغر، دنبال راه حل باش.

چند سؤال سخت پشت سر هم

۴

یهو چندتا سؤال میاد که نمی‌تونی جواب بدی. روحیات می‌ریزه.

چطور مدیریتش کنم؟

■ **پیچ انتظار رو تنظیم کن.** یعنی از قبل بدون که ممکنه چند سؤال سخت پشت سر هم بیاد. وقتی آمادگی داری، دیگه غافلگیر نمی‌شی.

چیکار کنم پیش نیاد؟

این اتفاق برای همه می‌افته. حتی رتبه ۱ سال ۱۳۸۸، هفت سؤال اول کنکورشو نتونست جواب بده! ولی چون مدیریت کرد، در نهایت رتبه ۱ شد. پس بدون این شرایط طبیعی.

خستگی و تحلیل رفتن ذهن

۵

در ساعات پایانی، مغزت کم‌کم خسته میشه. سرعتت میاد پایین و بی‌دقتی زیاد میشه.

چطور مدیریتش کنم؟

■ **استراحت میکرو:** چشمتو ببند، یه کم کشش انجام بده، آب بخور.

■ **تقویت انرژی:** یه خوراکی شیرین مثل خرما یا شکلات بخور.

■ **تغییر وضعیت بدن:** صاف بشین، شونه‌ها عقب. این حالت هوشیاری میاره.

چیکار کنم پیش نیاد؟

تمرین! توی آزمونای آزمایشی ماز، نشستن سه ساعته رو بارها تجربه می‌کنی. مدرسه معمولاً امتحان طولانی نداره، پس لازمه خودتو به این شرایط عادت بدی. حتی با لباس رسمی و صندلی شبیه‌سازی کن تا بدن و مغزت روز کنکور آماده باشن.

جمع‌بندی آخر...

بادت باشه همه داوطلب‌ها این حس‌ها رو تجربه می‌کنن؛ تفاوت در اینه که بعضیا بلدن مدیریتش کنن و بعضیا نه. لکچر جنگ «بی احساس بودن» نیست؛ هنر کنترل احساساته. تو ماه‌ها برای این روز تمرین کردی، الان وقتشه به خودت و تجربیاتت اعتماد کنی. هر بار که بگی از این موقعیت‌ها پیش لومده به باد پیاز «این اتفاق واسه همه هست، اما من آماده‌ام».



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

ریاضی ۱: تابع + شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۴۰
هندسه ۱: چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۶

بودجه‌بندی
این آزمون

ریاضی ۱: از این مبحث به طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۱: از این مبحث به طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

سهم در
کنکور

۱- رابطه $f = \{(1, a+b), (2, a-3b), (1, 2a-1), (2, 4), (3, 2a-b)\}$ تابع است. مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۲

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

رابطه f زمانی تابع را نشان می‌دهد که زوج‌های مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشد و یا زوج‌مرتبهایی که مؤلفه‌های اول یکسان دارند، دارای مؤلفه‌های دوم برابر باشند، بنابراین:

$a + b = 2a - 1 \Rightarrow a = b + 1$: مؤلفه اولشان ۱ است.

$a - 3b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ a - 3b = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله ۲ مجهول}} b = \frac{-3}{2} \text{ و } a = \frac{-1}{2}$: مؤلفه اولشان ۲ است.

$\Rightarrow f(3) = 2a - b \Rightarrow f(3) = 2(-\frac{1}{2}) - (-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$



۲- اگر تابع $f(x) = 2x^2 + (4x+a)(bx-1)$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) $-6/5$ (۳) $-8/5$ (۴) $2/5$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

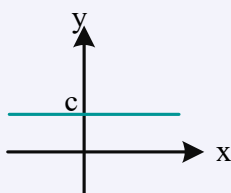
باید عبارت‌های x^2 و x حذف شوند و فقط عدد ثابت بماند.

$f(x) = 2x^2 + 4bx^2 - 4x + abx - a = (2+4b)x^2 + (ab-4)x - a$

$$\begin{cases} 2+4b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{4} \\ ab-4=0 \Rightarrow a+b=-8/5 \\ ab-4=0 \Rightarrow a=-8 \end{cases}$$

یادآوری تابع ثابت

تابع ثابت: هر عضو از دامنه را که به آن بدهیم، فقط یک عدد ثابت مانند (c) را به ما می‌دهد. ضابطه آن به صورت $y=c$ است و برد آن تک عضوی (c) است.





۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \geq a \\ 2x^2 & x \leq a \end{cases}$ تابع باشد، مجموع مقادیر ممکن $f(1)$ کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

$$a^2 + 4a = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = 4$$

برای اینکه f تابع باشد، باید:اگر $a = 0$ ، آن گاه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \geq 0 \\ 2x^2 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1^2 + 4 \times 1 = 5$$

اگر $a = 4$ ، آن گاه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \geq 4 \\ 2x^2 & x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2 \times 1^2 = 2$$

بنابراین، مجموع مقادیر ممکن $f(1)$ برابر ۷ است.

ایستگاه «بررسی تابع بودن چندضابطه‌ای‌ها»

اگر رابطه $f(x)$ چندضابطه‌ای به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) : D_{f_1} \\ f_2(x) : D_{f_2} \\ \vdots \\ f_n(x) : D_{f_n} \end{cases}$$

زمانی تابع است که شروط زیر را داشته باشد:

شرط ۱: هر کدام از $f_i(x)$ ها در دامنه خود، تابع باشند.**شرط ۲:** اگر D_{f_i} ، D_{f_j} با هم اشتراکی داشته باشند، آن گاه ضابطه‌های $f_i(x)$ و $f_j(x)$ در آن قسمت اشتراک از دامنه‌ها،

با هم برابر باشند.

یه نمونه باحال ببین!

رابطه $f(x)$ به صورت زیر است. اگر این رابطه تابع باشد، مقدار b چقدر است؟

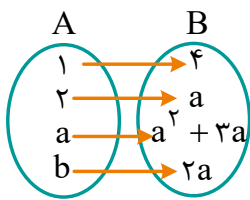
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x - b & x \geq 0 \end{cases}$$

شرط ۱: برقرار است. هر کدام از ضابطه‌ها در دامنه خود، تابع هستند.

شرط ۲: $x = 0$ تنها نقطه اشتراک دامنه‌هاست. پس:

$$0^2 = 0 - b \Rightarrow b = 0$$





۴- تابع f در نمودار و رسم شده، یک تابع خطی را نشان می‌دهد. مقدار b کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

ضابطه تابع خطی چی بود بچه‌ها؟!

ضابطه تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ می‌باشد. (حواستون هست که توان x باید یک باشه!)

تابع خطی را $f(x) = mx + n$ می‌نامیم. بنابراین:

$$f(x) = mx + n \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 4 \Rightarrow m + n = 4 \\ f(2) = a \Rightarrow 2m + n = a \end{cases} \xrightarrow{\text{۲ معادله ۲ مجهول}} \begin{cases} m = a - 4 \\ n = 8 - a \end{cases}$$

$$f(x) = \overset{a-4}{m} x + \overset{8-a}{n} \Rightarrow f(x) = (a-4)x + 8-a \Rightarrow f(a) = (a-4)a + 8-a \Rightarrow f(a) = a^2 - 5a + 8$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار و}} a^2 - 5a + 8 = a^2 + 3a \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = -3x + 7 \Rightarrow f(b) = 2a = 2$$

$$\Rightarrow f(b) = -3b + 7 = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$



$$5- \text{برد تابع } f(x) = \begin{cases} |2x-1| & x > 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -x^2 - 4x - 3 & x \leq -1 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$\mathbb{R} - (1, 2) \quad (4)$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad (3)$$

$$\mathbb{R} - (0, 1) \quad (2)$$

$$\mathbb{R} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

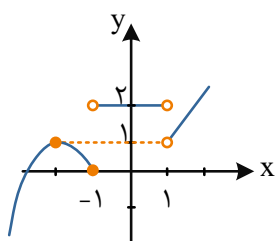
هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع چندضابطه‌ای دامنه تابع، اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها و برد تابع، اجتماع برد همه ضابطه‌ها است.

اگر $x > 1$ باشد، $2x - 1$ همواره مثبت است. در نتیجه:

$$|2x - 1| = 2x - 1$$

تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} |2x-1| & x > 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -x^2 - 4x - 3 & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -(x+2)^2 + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.





۶- در تابع خطی f می‌دانیم دامنه تابع $D_f = [-1, 5]$ و برد تابع $R_f = [2, 6]$ است. در این صورت، مجموع مقادیر ممکن برای $f(0)$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

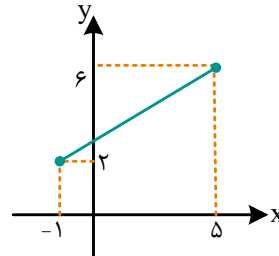
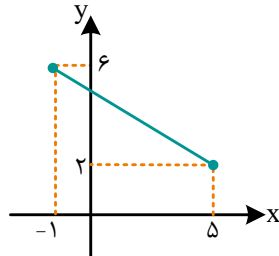
۸ (۲)

۹ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ ، در این صورت نمودار تابع f به یکی از دو شکل زیر خواهد بود. یعنی ممکن است $a > 0$ یا $a < 0$ باشد.

در حالت $a < 0$ داریم:

$$f(-1) = 6, f(5) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -a + b = 6 \\ f(5) = 5a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 6a = -4 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}, b = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{16}{3}$$

در حالت $a > 0$ داریم:

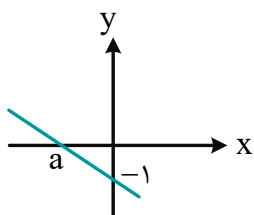
$$f(-1) = 2, f(5) = 6 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -a + b = 2 \\ f(5) = 5a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{8}{3}$$

$$\frac{16}{3} + \frac{8}{3} = 8$$

مجموع مقادیر ممکن برای $f(0)$ برابر است با:

۷- نمودار تابع خطی f به شکل مقابل است. اگر جمع جواب‌های معادله $|f(x)| = 2$ برابر ۶- باشد، مقدار a کدام است؟



-۴ (۱)

-۳ (۲)

-۵ (۳)

-۶ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

شیب خط را به دست آورده و معادله تابع را می‌نویسیم.

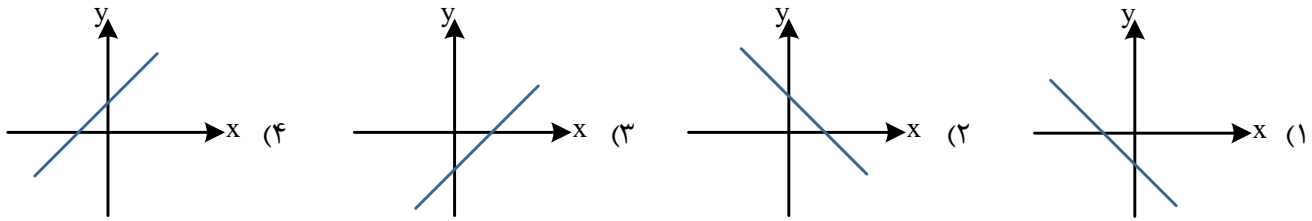
$-1 =$ عرض از مبدأ و $\frac{1}{a} =$ شیب خط

$$f(x) = mx + n \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}x - 1 \Rightarrow |f(x)| = 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{a}x - 1 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3a \\ \frac{1}{a}x - 1 = -2 \Rightarrow x = -a \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2a$$

$$\Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$



۸- تابع $f(x) = 2x - \frac{ax^2 + bx}{x+2}$ همانی است. نمودار تابع $y = af(x) + b$ چگونه است؟



پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۵)

تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

$$f(x) = x \Rightarrow x = 2x - \frac{ax^2 + bx}{x+2}$$

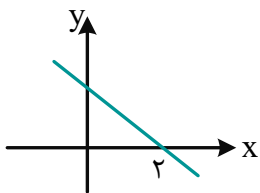
$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx}{x+2} = x \Rightarrow ax^2 + bx = x^2 + 2x \Rightarrow a=1, b=2$$

$$y = af(x) + b = x + 2$$

نمودار تابع $y = x + 2$ به صورت گزینه ۴ است. چون تنها نموداری است که شیب خط و عرض از مبدأ آن، هر دو مثبت هستند.



۹- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4ax + c}{b-x} & x \neq b \\ 1 & x = b \end{cases}$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟



$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{7}{4} \quad (1)$$

$$\frac{7}{8} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

با توجه به اینکه نمودار تابع f به صورت خطی بوده و ریشه آن $x=2$ می‌باشد، پس مخرج کسر باید عامل صورت باشد تا ساده شود و عبارت خطی شود، در نتیجه $(x-b)$ عاملی از صورت است که با مخرج ساده می‌شود و تنها عامل $(x-2)$ باقی می‌ماند که ریشه تابع خطی f را می‌دهد. یعنی:

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-2)}{(b-x)} = 2-x$$

حال از برابر قرار دادن عبارت صورت کسر در سؤال و صورت کسر عبارتی که خودمان به دست آوردیم، داریم:

$$\frac{(x-b)(x-2)}{b-x} = \frac{x^2 - 4ax + c}{b-x} \Rightarrow x^2 - (2+b)x + 2b = x^2 - 4ax + c \Rightarrow 2+b=4a, c=2b \quad (1)$$

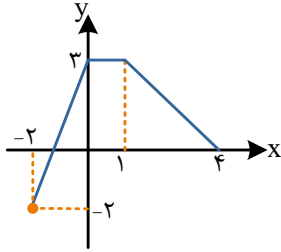
حال از ضابطه‌ای که سؤال داده می‌دانیم که $f(b)=1$ است. از طرفی چون در کل تابع خطی است پس باید در معادله خطی که در قسمت قبل به دست آوردیم نیز صدق کند. پس:

$$f(b)=1 \xrightarrow{f(x)=2-x} 2-b=1 \Rightarrow b=1 \xrightarrow{(1)} c=2, a=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{\frac{7}{4}}{2} = \frac{7}{8}$$



۱۰- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اشتراک دامنه و برد تابع $y = 2 + f(x-1)$ برابر کدام بازه است؟

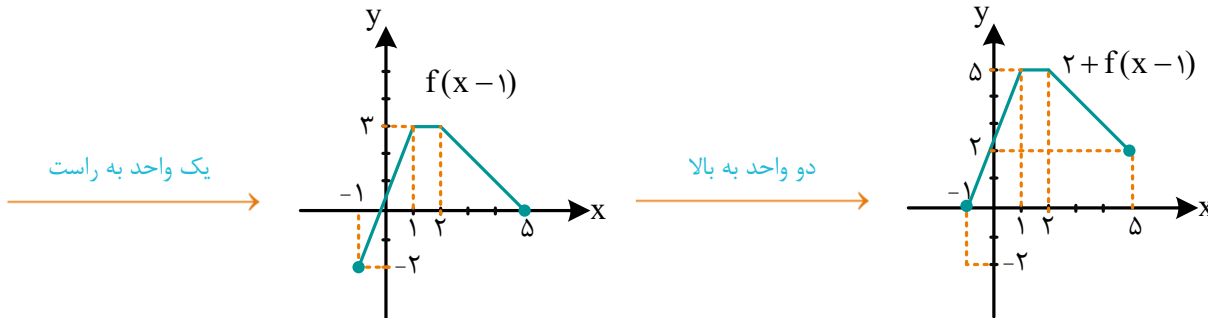


- (۱) $[-3, 1]$
- (۲) $[-3, 3]$
- (۳) $[0, 3]$
- (۴) $[0, 5]$

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

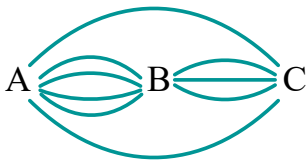
باید نمودار تابع را یک واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودارها، دامنه برابر $[-1, 5]$ و برد برابر $[0, 5]$ است. پس اشتراک دامنه و برد برابر $[0, 5]$ است.



۱۱- در شکل مقابل، راه‌های موجود بین شهرهای A، B و C رسم شده‌اند. به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم و برگردیم به طوری که از هیچ کدام از جاده‌ها بیش‌تر از یک بار استفاده نکنیم؟



- (۱) ۱۲۲
- (۲) ۱۹۶
- (۳) ۱۸۲
- (۴) ۱۶۸

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

می‌توانیم از شهر A به صورت مستقیم (بدون عبور از شهر B) و یا به طور غیرمستقیم (با عبور از شهر B) به شهر C برویم و با همین روند به طور مستقیم یا غیرمستقیم از C به A برگردیم. پس با اصل جمع مسئله را به چند حالت تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که چون مسئله بیان کرده از هیچ مسیری بیش‌تر از یک بار استفاده نکنیم به این معنی است که باید برای برگشت، مسیری که در رفت به C استفاده شده حذف شود و در مسیرهای مجاز شمرده نشود. به عنوان مثال اگر یکی از دو مسیر مستقیم به C را انتخاب کنیم و به C برویم و برای برگشت هم بخواهیم از مسیر مستقیم برگردیم تنها یک راه برای برگشت داریم. چون راه دیگر را در مسیر رفتن به C استفاده کرده‌ایم و اکنون دیگر مجاز به استفاده از آن نیستیم. به همین صورت برای باقی حالت‌های دیگر هم، مسیر رفت برای برگشت حذف می‌شود.

$$A \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} A \quad 2 \times 1 = 2$$

$$A \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} A \quad 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} A \quad 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A \quad 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$$

۱۲۲ = طبق اصل جمع

توجه داریم که در هر حالت از ۴ حالت بالا برای شمارش راه‌های رفتن از A به C از اصل ضرب استفاده می‌شود.



اصل جمع و اصل ضرب یعنی چه؟

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m + n$ روش وجود دارد.

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.



۱۲- با حروف کلمه «جوانمرد» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آن ها کلمه «مرد» دیده شده ولی کلمه «جوان» وجود نداشته باشد؟

۱۲۰ (۴)

۱۱۹ (۳)

۱۱۸ (۲)

۲۴ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

حروف (م، ر، د) را به یکدیگر بسته و آن ها را به صورت یک حرف [مرد] در نظر می گیریم. با ۴ حرف کلمه جوان و بسته [مرد]، ۵ حرف وجود دارد که تعداد جایگشت های آن ها برابر ۵! یعنی ۱۲۰ است. در ۲ حالت از این ۱۲۰ حالت کلمه جوان دیده می شود.

ج و ا ن [مرد]

[مرد] ج و ا ن

که قابل قبول نمی باشند، بنابراین تعداد حالات قابل قبول برابر است با:

$$۱۲۰ - ۲ = ۱۱۸$$



اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیده شدن آن ها کنار هم، یک «جایگشت» از آن اشیاء می گوئیم.



۱۳- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند تابع می توان نوشت، به طوری که $f(1) \neq 2$ و $f(2) \neq 5$ باشد؟

۲۵۰۰ (۴)

۲۰۰۰ (۳)

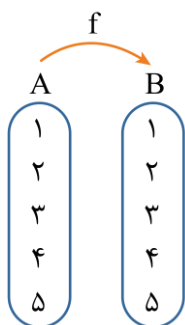
۱۸۰۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

توجه داریم که چون $f(1) \neq 2$ و $f(2) \neq 5$ است؛ بنابراین برای $f(1)$ و $f(2)$ تنها ۴ انتخاب وجود دارد اما $f(3)$ ، $f(4)$ و $f(5)$ برای انتخاب هر یک از ۵ عضو از مجموعه B آزاد هستند.



$$f = \{(1, \text{انتخاب ۴}), (2, \text{انتخاب ۵}), (3, \text{انتخاب ۴}), (4, \text{انتخاب ۵}), (5, \text{انتخاب ۵})\} \Rightarrow \text{تعداد کل توابع} = 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 2000$$



۱۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

۳۶ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

۱۲ حالت $\Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{1}$: رقم یکان صفر باشد.

۱
۲
۳
۴

به جز رقمی که در صدگان انتخاب شده

برای رقم یکان، دو حالت در نظر می گیریم:



۱۸ حالت $\Rightarrow \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{4}$: رقم یکان صفر نباشد.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 4 \end{array}$$

به جز رقمی که در یکان و صدگان انتخاب شده $\rightarrow$ به جز رقمی که در یکان انتخاب شده

تعداد کل حالت‌ها برابر $30 = 12 + 18$ است.

رفع ابهام!

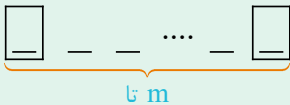
چرا رقم یکان را حالت‌بندی کردیم؟ چون در سؤال گفته شده عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام. برای زوج بودن، رقم یکان می‌تواند صفر باشد یا نباشد و برای تکراری نبودن، اگر رقم یکان صفر بود در دهگان نباید صفر بیاید. برای سه رقمی بودن هم که صدگان هیچ وقت نباید صفر باشد. مجموع این شرایط به ما می‌گوید که باید صفر بودن یا نبودن یکان را یک شرط در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد اعداد را در هر کدام از دو حالت به‌دست آورده و با هم جمع کنیم.

راهنمای زنگ‌بازی!

همیشه در سؤالات شمارشی، تعدادی جایگاه در نظر می‌گیریم که تعداد حالت‌های ممکن که می‌توانند اتخاذ کنند را در آن می‌نویسیم. حواستان باشد که برای نوشتن تعداد حالت‌های هر خانه، **اول به سراغ خانه‌هایی که شرط دارند می‌رویم.** در غیر این صورت ممکن است برخی شرایط از قلم بیافتند و تعدادی اشتباه به‌دست بیاوریم!

قلق‌شو یاد بگیر!

برای چنین سؤالاتی که هدف، ساخت یک عدد m رقمی با شرایط داده شده باشد، ابتدا m تا جایگاه به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



وقتی بحث زوج یا فرد بودن به میان می‌آید یعنی تعداد حالت‌های رقم یکان باید اولین چیزی باشد که مشخص می‌شود. همچنین **وجود یا عدم وجود صفر** در ارقام داده شده حالت‌بندی را بیش‌تر می‌کند. زیرا برای اینکه عدد خواسته شده m رقمی باشد عدد صفر نمی‌تواند در اولین جایگاه سمت چپ قرار گیرد. وقتی صفر هم بین ارقام وجود دارد، خانه شرط‌دار بعدی، اولین جایگاه از سمت چپ است.



۱۵- چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۵۷۳ وجود دارد که دارای رقم تکراری است؟

۱۴۲ (۴)

۱۴۱ (۳)

۱۳۴ (۲)

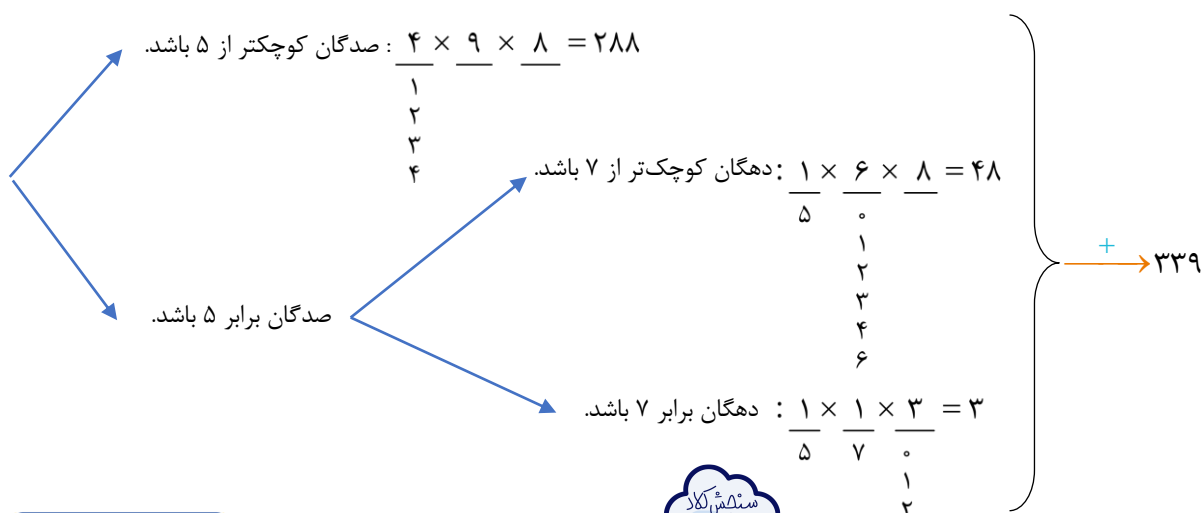
۱۳۳ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

تعداد کل اعداد سه رقمی کوچک‌تر از ۵۷۳ برابر $473 = 99 - 572$ است.

حال تعداد اعداد سه رقمی کوچک‌تر از ۵۷۳ که رقم تکراری ندارند را محاسبه می‌کنیم.





بنابراین تعداد اعداد سه رقمی کوچکتر از ۵۷۳ که رقم تکراری دارند برابر است با:

$$473 - 339 = 134$$



۱۶- در چند جایگشت از حروف کلمه today حروف t و d کنار هم قرار می گیرند ولی حروف a و y کنار هم قرار نمی گیرند؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن ۲ حرف t و d کنار هم هستند، را محاسبه می کنیم:

$$a, \boxed{d, t}, y, o \Rightarrow 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن حروف t و d کنار هم و حروف a و y نیز کنار هم باشند، برابر است با:

$$\boxed{a, y}, \boxed{o, t, d} \Rightarrow 3! \times 2! \times 2! = 24$$

طبق اصل متمم، تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن ۲ حرف t و d کنار هم باشند ولی حروف a و y کنار هم نباشند، برابر است با:

$$\text{جواب} = 48 - 24 = 24$$

جایگشت

هر طریقه قرار گرفتن n شیء متمایز در یک ردیف و در کنار هم را یک «جایگشت خطی» از آن n شیء می گوئیم. جایگشت خطی n شیء متمایز برابر n! است.

قلقشو یاد بگیر!

اگر در مسائل مربوط به جایگشت خطی اشیاء، چند شیء بخواهند کنار هم باشند اصطلاحاً اشیاء را به هم می بندیم و به عنوان یک شیء در نظر می گیریم. سپس جایگشت اشیاء کلی را در جایگشت اشیاء داخل دسته، ضرب می کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

۳ مهندس و ۴ پزشک را به چند طریق می توان در یک ردیف صندلی کنار هم نشاند به طوری که مهندس ها کنار هم باشند؟

پزشک، پزشک، پزشک، پزشک، مهندس، مهندس، مهندس

۳ مهندس را در یک بسته کنار هم قرار می دهیم. ببینید:

جایگشت کلی افراد
↑
جواب = $5! \times 3!$
↓
جایگشت افراد داخل دسته

کل دسته مهندس ها را یک شیء در نظر می گیریم. بنابراین:



۱۷- می خواهیم رأس های مربع را با چهار رنگ مختلف رنگ کنیم. این کار به چند طریق ممکن است هرگاه رؤس مجاور هم رنگ نباشند؟

۸۴ (۴)

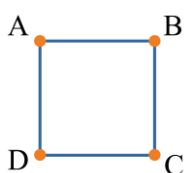
۶۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۴



دو حالت را در نظر می گیریم:

A و C هم رنگ باشند: که در این حالت برای A چهار انتخاب و برای C که هم رنگ با آن است یک انتخاب وجود دارد، پس برای B و D سه انتخاب باقی می ماند.

$$4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$$

A و C هم‌رنگ نباشند: که در این حالت برای A چهار انتخاب و برای C که ناهم‌رنگ با آن است سه انتخاب وجود دارد، از طرفی رئیس B و D نباید با A و C هم‌رنگ باشند، بنابراین برای هر کدام دو انتخاب باقی می‌ماند.

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

در کل ۸۴ حالت داریم.



۱۸- در چند جایگشت چهار حرفی از حروف کلمه logarithm حرف m وجود دارد ولی حرف t وجود ندارد؟

۹۶۰ (۴)

۸۴۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۵۰۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا حرف m را به چهار حالت در یکی از چهار خانه قرار می‌دهیم: — — — —

سپس در سه خانه دیگر، باید ۳ تا از ۷ حرف h, i, r, a, g, o, l قرار بگیرد که این کار نیز به $p(7, 3)$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با:

$$4 \times p(7, 3) = 4 \times \frac{7!}{(7-3)!} = 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$



۱۹- اگر $\binom{n}{2} = 8n$ باشد، در این صورت حاصل $\binom{2n+1}{n-2}$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

$\binom{35}{20}$ (۴)

$\binom{31}{18}$ (۳)

$\binom{33}{19}$ (۲)

$\binom{37}{23}$ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۴

$$\binom{n}{2} = 8n \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 8n \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 8n$$

$$\frac{n-1}{2} = 8 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17 \Rightarrow \binom{2n+1}{n-2} = \binom{35}{15} = \binom{35}{20}$$

ویژگی ترکیب

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$



۲۰- از بین ۴ دانشمند ایرانی، ۳ آلمانی و ۲ هندی، می‌خواهیم یک کمیته ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که حداقل یک ایرانی عضو آن باشد و هر دو هندی با هم در آن نباشند. این کار به چند طریق ممکن است؟

۱۰۳ (۴)

۱۰۲ (۳)

۷۰ (۲)

۶۹ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۴

ترکیب r شیء از n شیء متمایز

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.



تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

حالت اول

۱ هندی عضو کمیته باشد: از بین ۴ ایرانی و ۳ آلمانی باید ۳ نفر انتخاب کنیم که حداقل ۱ نفر ایرانی باشد:

$$\text{راه حل اول: } \underbrace{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}_{\text{۱ ایرانی}} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}_{\text{۲ ایرانی}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{۳ ایرانی}} = ۱۲ + ۱۲ + ۴ = ۳۴$$

$$\text{راه حل دوم: کل حالات} - \text{ایرانی نباشد} = \binom{7}{3} - \binom{3}{3} = ۳۵ - ۱ = ۳۴$$

حال تعداد حالات انتخاب ۱ هندی یعنی $\binom{2}{1}$ را در این عدد ضرب می‌کنیم:

$$\binom{2}{1} \times ۳۴ = ۶۸$$

حالت دوم

هیچ هندی، عضو کمیته نباشد: از بین ۴ ایرانی و ۳ آلمانی باید ۴ نفر انتخاب کنیم که قطعاً حداقل ۱ نفر ایرانی است. $\binom{7}{4} = ۳۵$

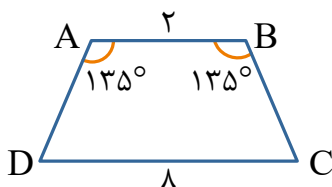
$$\Rightarrow \text{پاسخ مسئله} = ۶۸ + ۳۵ = ۱۰۳$$

رفع ابهام!

چرا حتماً حداقل یک ایرانی انتخاب می‌شود؟ چون تعداد آلمانی‌ها ۳ تا است و افرادی که می‌خواهیم انتخاب کنیم ۴ تا. پس حتی اگر هر ۳ تا آلمانی انتخاب شوند باز هم نفر بعدی مجبور است از بین ایرانی‌ها انتخاب شود.



۲۱- در دوزنقه شکل مقابل، زاویه‌های منفرجه هر کدام ۱۳۵° و طول دو قاعده ۲ و ۸ است. مساحت این دوزنقه کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۵

(۳) ۲۰

(۴) ۲۵

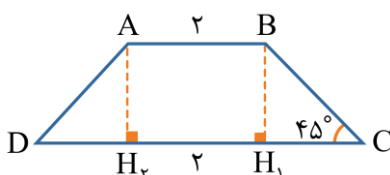
(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه $\hat{A} = \hat{B} = ۱۳۵^\circ$ داریم:

(۱) دوزنقه ABCD متساوی‌الساقین است.

$$\hat{D} = \hat{C} = ۴۵^\circ \quad (۲)$$





در نتیجه چهارضلعی ABH_1H_2 مستطیل و مثلث‌های $\triangle CH_1B$ و $\triangle ADH_2$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین و هم‌نهشت هستند، پس:

$$AB = H_1H_2 = 2 \Rightarrow H_1C = DH_2 = \frac{DC - H_2H_1}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$

در نتیجه:

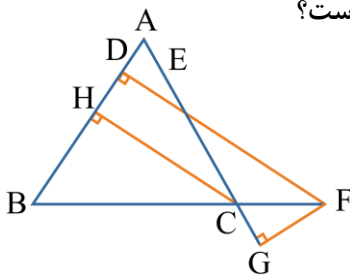
$$BH_1 = 3 \text{ و } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times BH_1 = 15$$

ویژگی زاویه‌های دوزنقه متساوی‌الساقین

در هر دوزنقه متساوی‌الساقین، زاویه ساق‌ها با قاعده بزرگ با هم برابر است و برعکس.
نتیجه) در هر دوزنقه متساوی‌الساقین، زاویه ساق‌ها با قاعده کوچک با هم برابر است و برعکس.



۲۲- در شکل مقابل، $AB = AC$ ، $HC = 6$ و $FG = 4$ است. اگر $AD = DH$ باشد، اندازه EF کدام است؟



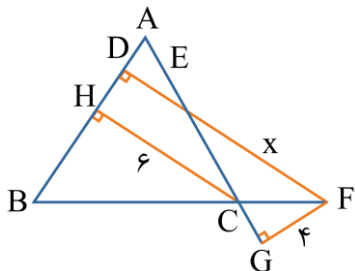
- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

دو نکته طلایی!

در مثلث متساوی‌الساقین، اگر از نقطه‌ای روی امتداد قاعده، دو عمود بر ساق‌ها رسم کنیم، قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده با ارتفاع وارد بر ساق برابر است.	در مثلث متساوی‌الساقین، اگر از نقطه‌ای روی قاعده دو عمود بر ساق‌ها رسم کنیم، مجموع طول دو عمود با ارتفاع وارد بر ساق برابر است.
$MH + MH' = h_b = h_c$	$MH + MH' = h_b = h_c$



با توجه به شکل مقابل و به کمک تعمیم قضیه تالس در مثلث $\triangle AHC$ داریم:

$$DE \parallel HC \Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{DE}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AD + DH} = \frac{DE}{HC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{6} \Rightarrow DE = 3$$

از طرفی به کمک نکته می‌دانیم که $FD - FG = CH$ است، پس:

$$FD - FG = CH \Rightarrow (FE + DE) - FG = CH$$

$$\Rightarrow (x + 3) - 4 = 6 \Rightarrow x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$$





۲۳- در مثلث $\triangle ABC$ داریم $AB=10$. اگر میانه‌های نظیر اضلاع BC و AC به ترتیب ۱۵ و ۱۸ باشند، مساحت مثلث $\triangle ABC$ ، کدام است؟

(۴) ۱۴۴

(۳) ۱۰۸

(۲) ۱۶۸

(۱) ۱۹۲

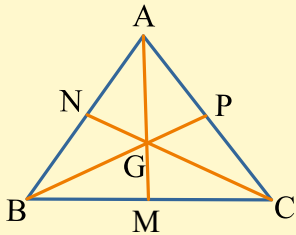
(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

میانه‌های مثلث

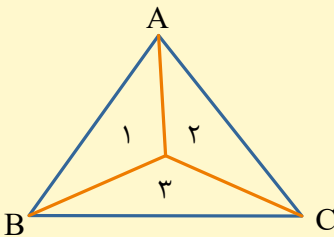


میانه‌های هر مثلث هم‌رسند و فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها از هر رأس، دو برابر فاصله آن از وسط ضلع مقابل است.

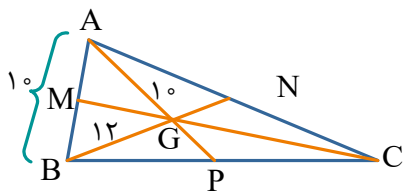


$$GA = 2GM \Rightarrow \begin{cases} GA = \frac{2}{3} AM \\ GM = \frac{1}{3} AM \end{cases}$$

اگر از محل هم‌رسی میانه‌های مثلث، به سه رأس وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید.



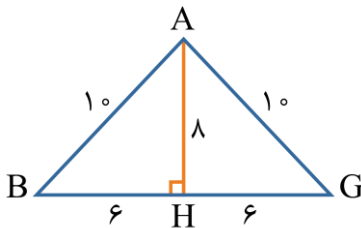
$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$



ابتدا با توجه به قسمت اول کلاس درس و اندازه‌های $BN=18$ ، $AP=15$ داریم:

$$\begin{cases} GB = \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} \times 18 = 12 \\ GA = \frac{2}{3} AP = \frac{2}{3} \times 15 = 10 \end{cases}$$

حال واضح است که مثلث $\triangle ABG$ با اضلاع $AB=AG=10$ متساوی‌الساقین است. پس می‌توانیم مساحت آن را حساب کنیم:



$$AH = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} AH \times BG = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48$$

و در نهایت با توجه قسمت دوم کلاس درس، خواهیم داشت:

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ABG} = 3 \times 48 = 144$$





۲۴- در یک مثلث متساوی الاضلاع، فاصله یک نقطه از ۳ ضلع $\sqrt{3}$ ، $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$ می باشد. مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) $36\sqrt{3}$

(۳) $24\sqrt{3}$

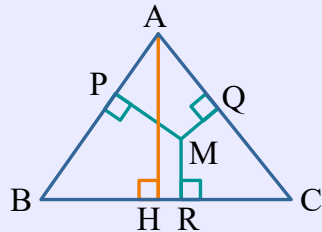
(۲) $12\sqrt{3}$

(۱) $6\sqrt{3}$

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

در مثلث متساوی الاضلاع...



$$MP + MQ + MR = AH$$

مجموع فواصل هر نقطه از ۳ ضلع مثلث متساوی الاضلاع، با ارتفاع مثلث برابر است.

ارتفاع و مساحت مثلث متساوی الاضلاع رو که یادته؟

در هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، ارتفاع مثلث $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ و مساحت آن $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

طبق درسنامه داریم:

$$h = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

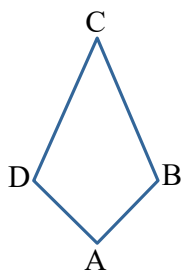
طبق یادآوری داریم:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow a = 12$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(12)^2 = 36\sqrt{3}$$



۲۵- در چهارضلعی مقابل، $AD=AB$ و $CD=BC$ است. اگر $\hat{B}=90^\circ$ ، $\hat{A}=150^\circ$ و $BD=1$ باشد، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

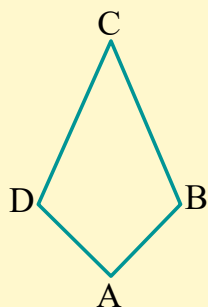
(۳) ۴

(۴) ۳

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

کایت

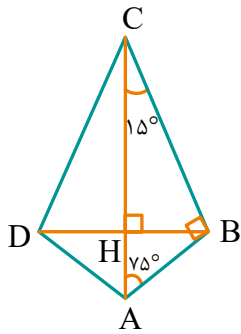


در چهارضلعی مقابل، اگر $AD=AB$ و $CD=CB$ باشد، قطرهای آن بر هم عمود هستند، AC نیمساز زاویه A و C است، BD توسط AC نصف می شود و مساحت ABCD نصف حاصل ضرب اندازه قطرهای آن است. یعنی:

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$



با توجه به درسنامه، مثلث $\triangle ABC$ ، قائم‌الزاویه است که زاویه 15° دارد، پس ارتفاع وارد بر وتر یعنی BH ، $\frac{1}{4}$ وتر یعنی AC است، پس داریم:

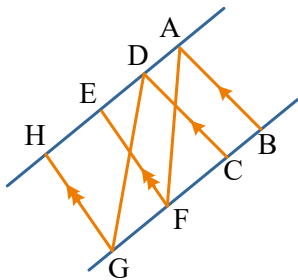


$$BH = \frac{1}{4} BD \xrightarrow{BD=1} BH = \frac{1}{4} \xrightarrow{BH=\frac{1}{4}AC} AC = 2$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



۲۶- در شکل مقابل، $CD \parallel AB$ و $GH \parallel EF$ است. اگر مساحت $ADGF$ ، چهار برابر مساحت $ABCD$ باشد، مساحت $HEFG$ چند برابر $ADGF$ است؟ ($AH \parallel BG$)



۱ (۱)

۱/۷۵ (۲)

۳/۲۵ (۳)

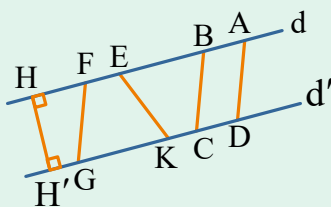
۴ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

قلقشو یاد بگیر!

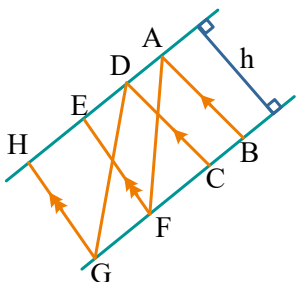
ارتفاع چهارضلعی‌هایی که دو رأس آن روی d و دو رأس دیگر آن روی d' است برابر با HH' است، یعنی:



$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times HH'$$

$$S_{EFGK} = \frac{EF + GK}{2} \times HH'$$

پس با توجه با قلی قبل داریم:



$$S_{ADGF} = 4 S_{ABCD}$$

$$\frac{AD + GF}{2} \times h = 4 AD \times h \Rightarrow GF = 7 AD$$

$$S_{HEFG} = GF \times h \Rightarrow S_{HEFG} = 7 AD \times h \Rightarrow \frac{S_{HEFG}}{S_{ADGF}} = \frac{7 AD \times h}{4 AD \times h} = \frac{7}{4} = 1/75$$

رفع ابهام!

برای چهارضلعی $ABCD$ از فرمول مساحت متوازی الاضلاع استفاده کردیم چون طبق اطلاعات سؤال فقط می‌دانیم که اضلاع روبه‌رو در آن موازی‌اند. برای چهارضلعی $ADGF$ از فرمول مساحت دوزنقه استفاده کردیم چون فقط می‌دانیم که دو ضلع AD و GF در آن با هم موازی‌اند. (حالا شما بگو ببینم برای چهارضلعی $HEFG$ چرا از فرمول مساحت متوازی الاضلاع استفاده کردیم؟)





- ۲۷- چندضلعی شبکه‌ای A، ۸ نقطه درونی بیش‌تر و ۴ نقطه مرزی کم‌تر از چندضلعی شبکه‌ای B دارد. اگر مساحت چندضلعی شبکه‌ای A، $\frac{2}{5}$ برابر مساحت چندضلعی شبکه‌ای B باشد، حداکثر تعداد نقاط مرزی چندضلعی شبکه‌ای B کدام است؟
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

فرض کنید چندضلعی شبکه‌ای B، دارای b نقطه مرزی و i نقطه درونی باشد. در این صورت، چندضلعی شبکه‌ای A، $b - 4$ نقطه مرزی و $i + 8$ نقطه درونی دارد. طبق فرمول پیک داریم:

$$S_B = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$S_A = \frac{b-4}{2} + (i+8) - 1 = \left(\frac{b}{2} + i - 1\right) + 6 = S_B + 6$$

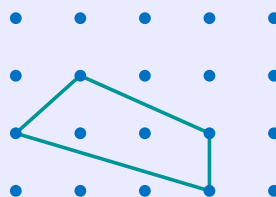
$$\Rightarrow S_A = 2/5 S_B \Rightarrow S_B + 6 = 2/5 S_B \Rightarrow 1/5 S_B = 6 \Rightarrow S_B = 4 \Rightarrow \frac{b}{2} + i - 1 = 4 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 5 \Rightarrow b + 2i = 10$$

پس چندضلعی شبکه‌ای B حداکثر ۱۰ نقطه مرزی دارد که این تعداد وقتی اتفاق می‌افتد که کم‌ترین نقاط درونی را داشته باشد که صفر کم‌ترین آن است.

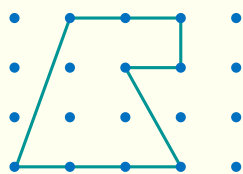
هر آنچه باید در مورد چندضلعی شبکه‌ای بدانید

مطابق شکل، نقطه‌هایی که روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی یا خط عمودی برابر یک واحد باشد را «نقاط شبکه‌ای» می‌نامند.

اگر یک چندضلعی، تمام رأس‌هایش روی نقاط شبکه‌ای باشند، «چندضلعی شبکه‌ای» نامیده می‌شود. مانند:

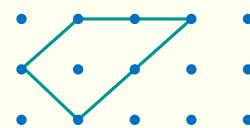


(۲) نقاط واقع در درون چندضلعی شبکه‌ای را «نقاط درونی» می‌نامند و تعداد آن‌ها را با i نشان می‌دهند.



$$\Rightarrow \text{تعداد نقاط درونی} = i = 3$$

(۱) نقاط شبکه‌ای واقع بر رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را «نقاط مرزی» می‌نامند و تعداد آن‌ها را با b نشان می‌دهند.



$$\Rightarrow \text{تعداد نقاط مرزی} = b = 6$$

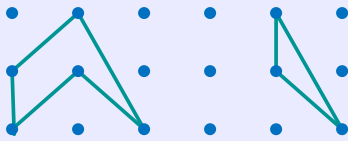
تعداد نقاط مرزی چندضلعی‌های شبکه‌ای هرگز کم‌تر از ۳ نمی‌تواند باشد یا به عبارت دیگر، هر چندضلعی شبکه‌ای حداقل ۳ نقطه مرزی دارد.



$$\Rightarrow b \geq 3 \text{ چندضلعی شبکه‌ای}$$



چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌توانند نقطهٔ درونی نداشته باشند یا به عبارت دیگر تعداد نقاط درونی چندضلعی‌های شبکه‌ای حداقل صفر است.



$i \geq 0 \Rightarrow$ چندضلعی شبکه‌ای

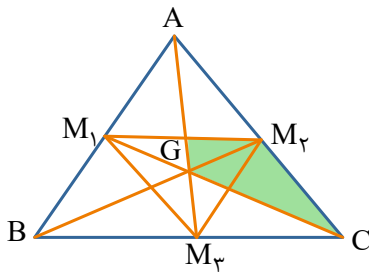
اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad \text{فرمول پیک}$$



۲۸- در شکل مقابل، میانه‌های مثلث $\triangle ABC$ را رسم کرده‌ایم. اگر پای میانه‌های مثلث را به هم وصل کنیم مساحت قسمت هاشورخورده

چند برابر مساحت مثلث $\triangle ABC$ است؟



$$\frac{5}{24} \quad (2)$$

$$\frac{7}{12} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

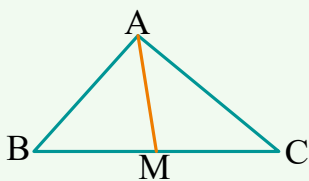
(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینهٔ ۲

بیاید اول چند تا نکتهٔ کاربردی دربارهٔ مساحت با هم ببینیم!



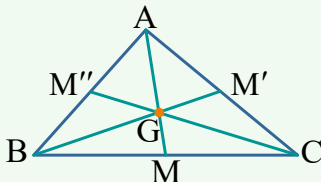
میانهٔ مثلث، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند، یعنی اگر M میانه باشد:



$$S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$



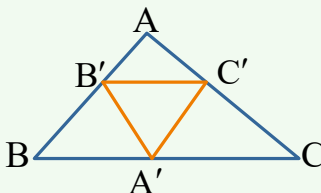
اگر ۳ میانهٔ یک مثلث را رسم کنیم، مثلث به ۶ مثلث دیگر تقسیم می‌شود که مساحت آن‌ها با هم برابر است یعنی:



$$S_{\triangle CGM} = S_{\triangle BGM''} = S_{\triangle AGM'} = S_{\triangle AGM''} = S_{\triangle BGM} = S_{\triangle CGM'} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$



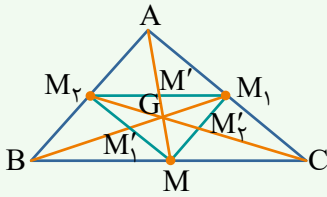
اگر وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم ۴ مثلث به دست می‌آید که مساحت آن‌ها با هم برابر است.



$$S_{\triangle AB'C'} = S_{\triangle CC'A'} = S_{\triangle BB'A'} = S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$



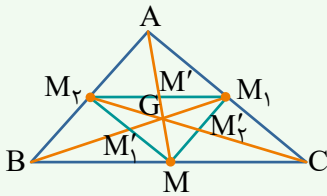
اگر میانه‌های یک مثلث را رسم کنیم و پای میانه‌ها را هم به هم وصل کنیم، مطابق شکل مقابل داریم:



$$S_{\triangle G M_1 M_2} = S_{\triangle G M_2 M_3} = S_{\triangle G M_3 M_4} = S_{\triangle G M_4 M_5} = S_{\triangle G M_5 M_6} = S_{\triangle G M_6 M_1} = \frac{1}{24} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle A M_1 M_2} = S_{\triangle M_1 M_2 C} = S_{\triangle M_2 M_3 C} = S_{\triangle M_3 M_4 B} = S_{\triangle M_4 M_5 B} = S_{\triangle A M_6 M_5} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$

نتیجه ۱) در شکل زیر، اگر M_1, M_2, M_3 وسط اضلاع مثلث ABC باشند، داریم:

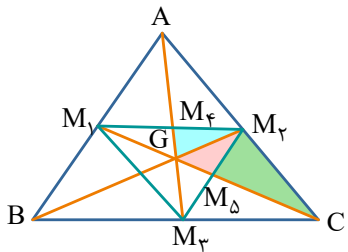


$$S_{\triangle G B C} = S_{\triangle G A B} = S_{\triangle G A C} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

نتیجه ۲) در همان شکل قبل داریم:

$$S_{\triangle G B M_2} = S_{\triangle G M_1 A M_2} = S_{\triangle G M_1 C M} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به درسنامه و نیز شکل مقابل، داریم:



$$\begin{cases} S_{\triangle C M_2 M_3} = \frac{1}{6} S_{\triangle C M_2 M_3} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle G M_2 M_3} = \frac{1}{24} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle G M_2 M_4} = \frac{1}{24} S_{\triangle ABC} \end{cases}$$

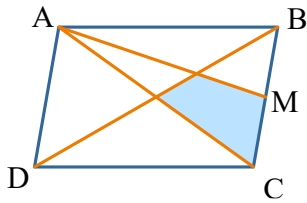
$$\Rightarrow S_{\text{هاشور}} = S_{\triangle C M_2 M_3} + S_{\triangle G M_2 M_3} + S_{\triangle G M_2 M_4} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\text{هاشور}} = \frac{5}{24} S_{\triangle ABC}$$





۲۹- در شکل مقابل، ABCD، متوازی الاضلاع و M وسط BC است. مساحت متوازی الاضلاع ABCD چند برابر مساحت چهارضلعی رنگی است؟



رنگی است؟

۱ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

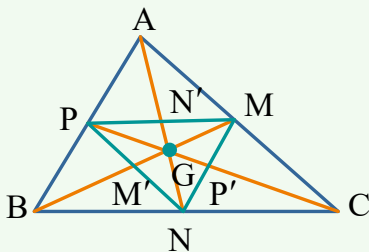
۱۲ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

نکته درباره مساحت‌ها

در شکل مقابل، M، N و P، به ترتیب وسط اضلاع AC، BC و AB هستند. داریم:



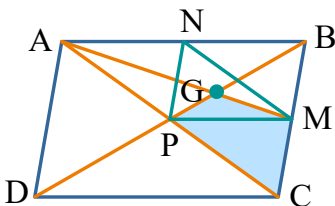
$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle MNC} = S_{\triangle AMP} = S_{\triangle BPN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle MNG} = S_{\triangle PNG} = S_{\triangle MPG} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$$

در شکل داده شده، مساحت مثلث $\triangle ABC$ ، نصف مساحت متوازی الاضلاع ABCD است. از طرفی، چون M وسط BC و P وسط AC است (در متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند)، MP چهارضلعی رنگی را به دو قسمت تقسیم می‌کند.

مساحت مثلث $\triangle MPC$ که طبق درسنامه، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث $\triangle ABC$ است و مساحت $\triangle MGP$ که آن هم طبق نکته، $\frac{1}{12}$ مساحت مثلث

$\triangle ABC$ است، پس:

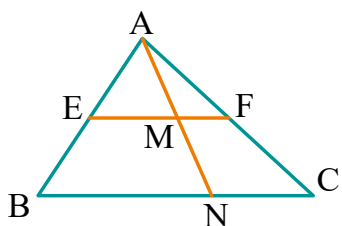


$$S_{MGPC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{12} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

پس S_{MGPC} برابر $\frac{1}{6}$ مساحت ABCD و در نتیجه مساحت ABCD برابر S_{MGPC} است.



۳۰- در مثلث $\triangle ABC$ ، خط EF موازی BC است. اگر $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{MF}{BN} = \frac{1}{6}$ باشد، حاصل $\frac{S_{MFCN}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟



$\frac{4}{85}$ (۲)

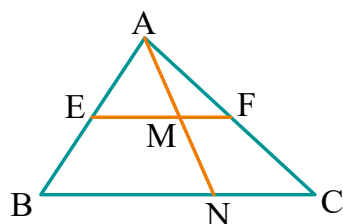
$\frac{4}{25}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$\frac{21}{85}$ (۳)



می‌دانیم که $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{MF}{BN} = \frac{1}{6}$ است، پس:



$$\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{AB} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\triangle ABC \sim \triangle AEF} \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \triangle ANC: \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5} = \frac{MF}{NC}$$

$$\frac{MF}{BN} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\frac{MF}{NC}}{\frac{BN}{MF}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NC}{BN} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{NC}{BC} = \frac{5}{17}$$

و با توجه به اینکه $\frac{NC}{BC} = \frac{5}{17}$ است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \\ \triangle ANC: \frac{MF}{NC} = \frac{AF}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{MF}{NC} \Rightarrow \frac{MF}{EF} = \frac{NC}{BC} = \frac{5}{17}$$

از آن جا که ارتفاع هر دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ANC$ با هم برابر است نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت قاعده‌هاست:

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ANC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{17} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{5}{17} \quad (2)$$

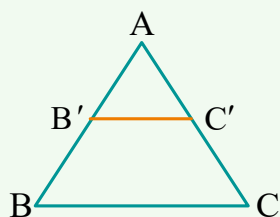
حال به کمک رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$S_{\triangle AMF} = \frac{5}{17} S_{\triangle AEF} \xrightarrow{S_{\triangle AEF} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC}} S_{\triangle AMF} = \frac{5}{17} \times \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{85} S_{\triangle ABC}$$

از طرفی $S_{MFCN} = S_{\triangle ANC} - S_{\triangle AMF}$ است، پس:

$$S_{MFCN} = \frac{5}{17} S_{\triangle ABC} - \frac{4}{85} S_{\triangle ABC} = \frac{21}{85} S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{MFCN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{21}{85}$$

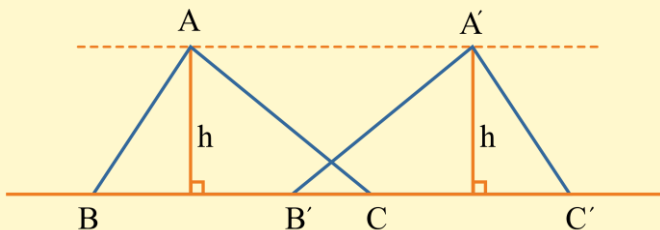
موقعیتی که دو مثلث متشابه می‌سازد!



اگر در شکل مقابل، $BC \parallel B'C'$ باشد، مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متشابه هستند.

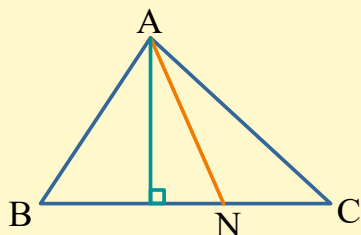


۱) در مثلث‌هایی که ارتفاع‌ها با هم برابر است، نسبت مساحت‌ها همان نسبت قاعده‌ها است.



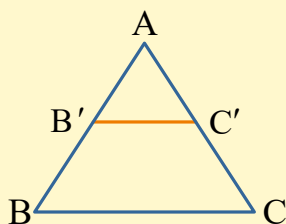
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$

نمونه‌ای دیگر از رخ دادن این حالت:



$$\frac{S_{\triangle ANC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NC}{BC}$$

۲) در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع (نسبت تشابه) است.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

دما و گرما (صفحه‌های ۸۳ تا ۱۲۶)

بودجه‌بندی
این آزمون

۲ تست از ۳۵ تست کنکور

سهم در
کنکور

۳۱- گرم‌ترین نقطه روی زمین، ناحیه‌ای در کویر لوت است که دمای آن تا حدود 158°F و سردترین نقطه در قطب جنوب است که دمای آن تا -89°C گزارش شده است. اختلاف این دو دما چند کلوین است؟

(۴) ۴۳۳

(۳) ۲۴۷

(۲) ۱۵۹

(۱) ۶۹

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲



اختلاف دما برحسب کلوین و درجه سلسیوس یکسان است.

$$\Delta\theta = \Delta T$$

گام اول:

بالاترین دما برحسب درجه سلسیوس برابر است با:

$$F = \frac{9}{5}\theta_1 + 32 \Rightarrow 158 = \frac{9}{5}\theta_1 + 32 \Rightarrow \theta_1 = 70^{\circ}\text{C}$$

گام آخر:

اختلاف دماها برابر است با:

$$\theta_1 - \theta_2 = 70 - (-89) = 159^{\circ}\text{C}$$

$$\Rightarrow \Delta T = 159\text{K}$$



۳۲- در شکل زیر، دمای میله‌ها را چند درجه سلسیوس افزایش دهیم تا طول دو میله A و B برابر شود؟

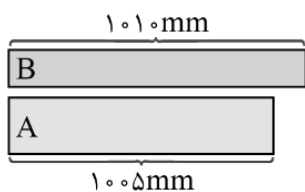
$$(\alpha_B = 2 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}, \alpha_A = 4 \times 10^{-5} \text{K}^{-1})$$

(۱) ۸۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۲۰۰

(۴) ۲۵۰



(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$L_2 = L_1 + L_1 \alpha \Delta\theta \rightarrow L_{2A} = L_{2B} \rightarrow L_1 + L_1 \alpha \Delta\theta = L_2 + L_2 \alpha \Delta\theta$$

$$\rightarrow L_{1A} + L_{1A} \alpha \Delta\theta = L_{1B} + L_{1B} \alpha \Delta\theta$$

$$\rightarrow 1005 + 1005 \times 4 \times 10^{-5} \Delta\theta = 1010 + 1010 \times 2 \times 10^{-5} \Delta\theta$$

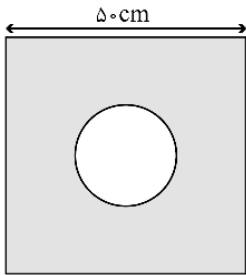
$$\rightarrow 4020 \times 10^{-5} \Delta\theta - 2020 \times 10^{-5} \Delta\theta = 5$$

$$\rightarrow 2000 \times 10^{-5} \Delta\theta = 5$$

$$\rightarrow \Delta\theta = 250^{\circ}\text{C}$$



۳۳- مطابق شکل، درون یک ورقه مسی مربع شکل یک حفره دایره‌ای به مساحت 400 cm^2 ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای این ورقه را افزایش دهیم، طول ضلع ورقه $50/3 \text{ cm}$ می‌شود. مساحت حفره پس از تغییر دما چند سانتی‌متر مربع خواهد شد؟



(۱) $402/4$

(۲) $404/8$

(۳) $409/6$

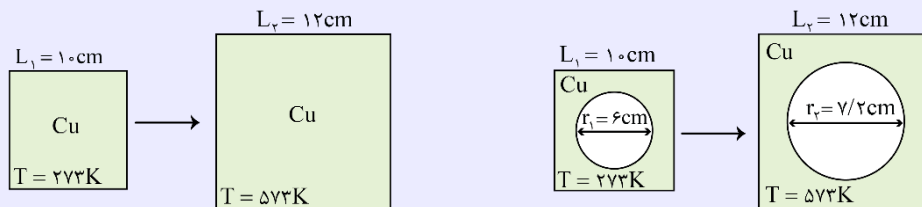
(۴) $410/4$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه

دو ورقه فلزی کاملاً مشابه در اختیار داریم. درون یکی از ورقه‌ها حفره‌های دایره‌ای شکل ایجاد می‌کنیم سپس دمای هر دو ورقه را به یک میزان افزایش می‌دهیم:



هم فلز و هم حفره هر دو به یک نسبت منبسط می‌شوند گویا اصلاً حفره‌ای وجود ندارد.

$$\frac{12}{10} = \frac{7/2}{6}$$

نسبت انبساط حفره و انبساط فلز یکسان خواهد بود یعنی انبساط حفره دقیقاً از الگوی انبساط فلز اطرافش تبعیت می‌کند. پس برای محاسبه میزان انبساط حفره می‌توان از ضریب انبساط فلز اطرافش استفاده کرد.

$$\Delta r = r_1 \alpha \Delta \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= L_1 \alpha \Delta \theta \\ \Delta A &= A_1 (2\alpha) \Delta \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta A} = \frac{L_1 \alpha \Delta \theta}{A_1 (2\alpha) \Delta \theta}$$

$$\rightarrow \frac{50/3 - 50}{\Delta A} = \frac{50 \times \alpha \times \Delta \theta}{400 \times 2\alpha \Delta \theta} \rightarrow \Delta A = 4/8 \text{ cm}^2$$

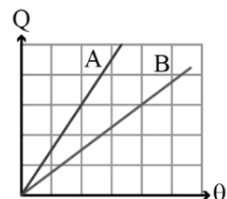
$$\Delta A = A_2 - A_1 \rightarrow 4/8 = A_2 - 400 \rightarrow A_2 = 404/8 \text{ cm}^2$$



۳۴- نمودار گرمای دریافت‌شده بر حسب تغییرات دما برای دو کره A و B مطابق شکل زیر است. شعاع خارجی دو کره یکسان است

ولی کره B توخالی و کره A توپر است و ضریب انبساط طولی کره B، $\frac{3}{4}$ برابر ضریب انبساط طولی کره A است. چه تعداد از

عبارت‌های زیر در مورد این دو کره الزاماً درست است؟

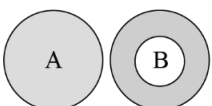


الف: اگر به دو کره گرمای یکسانی بدهیم، افزایش حجم کره B، $\frac{3}{4}$ برابر افزایش حجم کره A خواهد بود.

ب: اگر دمای دو کره را به یک اندازه بالا ببریم، تغییر قطر کره B کمتر از تغییر قطر کره A خواهد بود.

ج: با افزایش دمای کره B، نسبت شعاع داخلی و شعاع خارجی آن کاهش می‌یابد.

د: گرمای ویژه کره A دو برابر گرمای ویژه کره B می‌باشد.

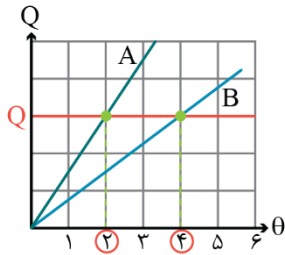


(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر



الف: وقتی به دو کره گرمای یکسانی بدهیم، طبق خط افقی رسم شده، تغییر دمای کره B، دو برابر تغییر دمای کره A خواهد شد:

$$\Delta V = V_1 \beta \Delta T \rightarrow \frac{\Delta V_B}{\Delta V_A} = \frac{\beta_B}{\beta_A} \times \frac{\Delta T_B}{\Delta T_A} \rightarrow \frac{\Delta V_B}{\Delta V_A} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} \quad (\checkmark)$$

ب: قطر و حجم اولیه دو کره یکسان است. از طرفی افزایش دما هم برای هر دو کره برابر می‌باشد، پس طبق رابطه $\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta$ چون

$$\alpha_B = \frac{3}{4} \alpha_A \quad \text{است، پس} \quad \Delta L_B = \frac{3}{4} \Delta L_A \quad \text{می‌باشد.} \quad (\checkmark)$$

ج: همان‌طور که می‌دانید وقتی دمای یک جسم حفره‌دار را افزایش دهیم، تغییر حجم حفره از الگوی تغییر حجم فلز اطراف حفره تبعیت می‌کند، بنابراین نسبت شعاع داخلی به خارجی کره B ثابت می‌ماند. **(*)**

د: شیب نمودار $Q - \theta$ برابر ظرفیت گرمایی جسم است نه گرمای ویژه، پس در اینجا ظرفیت گرمایی A، دو برابر B است و چون جرم کره‌ها را نداریم در مورد گرمای ویژه آن‌ها اظهار نظر نمی‌توان کرد. **(*)**



۳۵- اگر به جسم A به جرم m، گرمای Q داده شود، دمای آن 1°C بالا می‌رود. اگر به جسم B به جرم ۲m، گرمای ۸Q داده شود، دمای آن 5°C بالا می‌رود. گرمای ویژه جسم A چند برابر گرمای ویژه جسم B است؟

۸ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)



گرما

هنگامی که به یک جسم، گرما می‌دهیم، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

۱- می‌تواند باعث تغییر دمای یک جسم شود. مثلاً وقتی به آب درون کتری گرما می‌دهیم، داغ می‌شود و دمای آن بالا می‌رود.

گرما

۲- می‌تواند باعث تغییر حالت (فاز) جسم شود. مثلاً وقتی به یک قطعه یخ صفر درجه سلسیوس گرما می‌دهیم، ذوب خواهد شد.

در این قسمت به بررسی بالا رفتن دمای جسم بر اثر گرما می‌پردازیم.



گرمای لازم برای تغییر دما

این گرما با جرم جسم و تغییر دمای آن متناسب است و طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = mc\Delta\theta \quad \text{یا} \quad Q = C\Delta\theta$$

در این روابط، C گرمای ویژه جسم و C، ظرفیت گرمایی آن است.

گرمای ویژه: مقدار گرمایی است که یک کیلوگرم از ماده می‌گیرد تا دمای آن یک درجه سلسیوس بالا برود. گرمای ویژه وابسته به جنس ماده

است و یکای استاندارد آن $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ است.

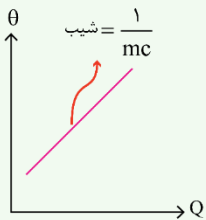


ظرفیت گرمایی

مقدار گرمایی که جسم می‌گیرد تا دمای آن 1°C (یا ۱ K) افزایش یابد، ظرفیت گرمایی گویند و یکای SI آن $\frac{\text{J}}{\text{K}}$ است.

تذکره: $Q > 0$ نشان‌دهنده گرما گرفتن و $Q < 0$ نشان‌دهنده گرما از دست دادن است.

مطابق رابطه $Q = mc\Delta\theta$ داریم:



$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \text{شیب نمودار } \theta \text{ بر حسب } Q: \frac{\Delta\theta}{Q} = \frac{1}{mc} = \frac{1}{C}$$

بنابراین شیب نمودار θ بر حسب Q برابر عکس ظرفیت گرمایی جسم است. دقت کنید که این نمودار فقط به ما کمک می‌کند تا ظرفیت گرمایی را برای دو جسم مقایسه کنیم. اگر بخواهیم گرمای ویژه را هم مقایسه کنیم، باید راجع به جرم دو جسم اطلاعات داشته باشیم. دقت کنید اگر نمودار Q بر حسب θ داده شود، شیب آن برابر ظرفیت گرمایی C است.

۱- هنگامی که دمای دو جسم با گرفتن گرما تغییر می‌کند، برای مقایسه آن‌ها می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$

۲- در صورتی که به جای جرم جسم‌ها، چگالی و حجم آن‌ها داده شده باشد، برای مقایسه آن‌ها از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ m = \rho V \end{cases} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{V_2}{V_1} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$

برای مقایسه دو جسم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{c_A}{c_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{\Delta Q} = \frac{m}{\Delta m} \times \frac{c_A}{c_B} \times \frac{1}{\Delta} \rightarrow \frac{c_A}{c_B} = \frac{1}{\Delta}$$



۳۶- گلوله‌ای مسی به جرم ۱۰۰ گرم و دمای اولیه 20°C از ارتفاع ۶۰ متری نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به درون ظرف عایقی که روی زمین قرار گرفته و حاوی ۲۰۰ گرم آب صفر درجه سلسیوس است پرتاب شده و در آن متوقف می‌شود. اگر تبادل انرژی فقط بین آب و گلوله مسی صورت گیرد، دمای نهایی مجموعه چند درجه سلسیوس خواهد شد؟ (از مقاومت هوا صرف نظر شود و $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ ، $c_{\text{مس}} = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$)

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

اگر جسمی از ارتفاع h سقوط کند و انرژی پتانسیل آن به گرما تبدیل شود، داریم:

$$Q = U = mgh = mc\Delta\theta$$

اگر درصدی از گرمای تولید شده به جسم برگردد و بقیه به زمین و محیط اطراف داده شود:

$$Q = \frac{x}{100} \times mgh \quad x: \text{درصدی که به خود جسم برمی‌گردد}$$

اگر جسم متحرکی به مانع برخورد کرده و متوقف شود، انرژی جنبشی آن به گرما تبدیل می‌شود و داریم:

$$Q = K = \frac{1}{2}mv^2 = mc\Delta\theta$$

حال اگر درصدی از گرمای تولید شده به جسم برگردد داریم:

$$Q = \frac{x}{100} \times \frac{1}{2} mv^2 \quad x: \text{درصدی که به جسم برمی‌گردد}$$

انرژی پتانسیل و جنبشی گلوله به گرما تبدیل شده و به مجموعه آب و مس داده می‌شود اگر دمای نهایی را θ_e در نظر بگیریم داریم:

$$m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta_{\text{آب}}) + m_{\text{مس}} c_{\text{مس}} (\theta_e - \theta_{\text{مس}}) = mgh + \frac{1}{2} mv^2$$

$$0/2 \times 4200 (\theta_e - 0) + 0/1 \times 400 (\theta_e - 20) = 0/1 \times 10 \times 60 + \frac{1}{2} \times 0/1 \times 400$$

$$840\theta_e + 40\theta_e - 800 = 60 + 20 \rightarrow 880\theta_e = 880 \rightarrow \theta_e = 1^\circ\text{C}$$



۳۷- درون یک ظرف فلزی با ظرفیت گرمایی $600 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ و دمای 30°C ، 200 گرم آب با دمای 50°C می‌ریزیم و یک گرمکن با راندمان 80% درصد و توان 250W درون آن قرار می‌دهیم. چند ثانیه طول می‌کشد تا در فشار یک جو آب شروع به جوشیدن کند؟

$$(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}})$$

۴۲۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴



گرما

گرما (Q): انرژی‌ای است که به دلیل اختلاف دما از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود. یکای گرما:

$$1 \text{ cal} = 4/186 \text{ J} \quad \text{گرما} = J = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{N.m}$$

گرما یک کمیت نرده‌ای و فرعی است.

اشاره کردن به گرمای موجود در یک جسم اشتباه است چون گرما مربوط به انرژی در حال گذار است.

عبارت نادرست	عبارت درست
جسم دارای ۲۰ ژول گرما است.	جسم ۲۰ ژول گرما از دست داده یا گرفته است.
گرمای جسم زیاد شده است.	۲۰ ژول گرما به جسم منتقل شده است.
گرمای جسم A از جسم B بیشتر است.	گرما از جسم A به جسم B منتقل شده

اگر به جسمی گرما بدهیم دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول) دمای جسم تغییر کند ولی حالت فاز ثابت بماند.

حالت دوم) دمای جسم ثابت بماند ولی حالت (فاز) تغییر کند.

امکان ندارد تغییر دما و تغییر حالت هم‌زمان با هم اتفاق بیفتد.

حالت اول) گرما باعث تغییر دمای جسم شود: (فاز یا حالت ثابت می‌ماند.)

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = C\Delta T$$

C : ظرفیت گرمایی

ΔT : تغییر دما

c : گرمای ویژه

m : جرم

Q : انرژی گرمایی

الف) یکاها در SI

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{J} & & \\ & \text{kg} & \text{kg.K} & \text{K} & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ Q = m & c & \Delta T & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{cal} & \text{g} & \text{g}^\circ\text{C} & ^\circ\text{C} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Q = m & c & \Delta T \end{array}$$

علامت گرما:

۱) اگر به جسم گرما بدهیم؛ ← انرژی جنبشی ذرات سازنده آن زیاد می‌شود؛ ← انرژی درونی جسم افزایش می‌یابد؛ ← دمای جسم بالا می‌رود.

$$\uparrow T \Rightarrow T_f > T_i \Rightarrow Q > 0$$

۲) اگر از جسم گرما بگیریم؛ ← انرژی جنبشی ذرات سازنده آن کم می‌شود؛ ← انرژی درونی جسم کاهش می‌یابد؛ ← دمای جسم پایین می‌رود.

$$\downarrow T \Rightarrow T_f < T_i \Rightarrow Q < 0$$



محاسبه توان و راندمان کتری برقی

انرژی گرمایی که کتری به محتویات داخلش می‌دهد همان انرژی (کار) مفید است.

$$P_{\text{مفید}} = \frac{Q}{\Delta t}$$

$$Ra = \frac{\text{توان مفید (خروجی)}}{\text{توان کل (ورودی)}} \times 100 = \frac{\text{انرژی مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times 100$$

$$Ra = 100 \% \text{ کتری آرمانی}$$

ابتدا توان مفید گرمکن را محاسبه می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \times 100 \rightarrow 80 = \frac{P_{\text{مفید}}}{250} \times 100 \rightarrow P_{\text{مفید}} = 200 \text{ W}$$

برای جوشیدن آب باید دمای مجموعه را به 100°C برسانیم:

$$50^\circ\text{C} \text{ آب } 200 \text{ g} \rightarrow 100^\circ\text{C}$$

$$Q_1 = mc\Delta\theta = 0.2 \times 4200 \times 50 = 42000 \text{ J}$$

$$30^\circ\text{C} \text{ ظرف } \rightarrow 100^\circ\text{C}$$

$$Q_2 = mc\Delta\theta = C\Delta\theta = 600 \times 70 = 42000 \text{ J}$$

$$P = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta t} \rightarrow 200 = \frac{42000 + 42000}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = 420 \text{ s}$$



۳۸- درون یک ظرف با دمای 35°C مقدار 200 g گرم آب با دمای 20°C و یک قطعه شیشه به جرم 500 g و دمای 10°C می‌اندازیم.

پس از برقراری تعادل گرمایی، دمای تعادل به 25°C می‌رسد. با چشم‌پوشی از اتلاف انرژی در محیط، ظرفیت گرمایی ظرف در

$$\text{SI چقدر است؟ } (c_{\text{شیشه}} = 840 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}, c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}})$$

$$1200 \text{ (4)}$$

$$1050 \text{ (3)}$$

$$950 \text{ (2)}$$

$$800 \text{ (1)}$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

تعادل گرمایی

اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد. به این دما، دمای تعادل می‌گویند.

بنابر قانون پایستگی انرژی، همان‌قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند، پس جمع جبری این Q ها صفر می‌شود:



روش کلی:

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

$$|Q_{\text{گرفته شده}}| = |Q_{\text{داده شده}}|$$

۱- اجسامی که دمای آن‌ها بالاتر است گرما از دست می‌دهند و دمای آن‌ها پایین می‌آید، پس علامت Q برای آن‌ها منفی است. Q^-

۲- اجسامی که دمای آن‌ها پایین‌تر است گرما می‌گیرند و دمای آن‌ها بالا می‌رود پس علامت Q برای آن‌ها مثبت است. Q^+

در تعادل گرمایی همه اجسام به دمای یکسان می‌رسند ولی فاز (حالت) آن‌ها ممکن است یکسان نباشد.

همهٔ مواد را به دمای تعادل می‌رسانیم و Q آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$۳۵^{\circ}\text{C} \rightarrow ۲۵^{\circ}\text{C}$$

$$Q_1 = mc\Delta\theta = C\Delta\theta = C \times (۲۵ - ۳۵) = -۱۰\text{C}$$

$$۲۰^{\circ}\text{C} \text{ آب } ۲۰۰\text{g} \rightarrow ۲۵^{\circ}\text{C}$$

$$Q_2 = mc\Delta\theta = ۰/۲ \times ۴۲۰۰ \times (۲۵ - ۲۰) = ۴۲۰۰\text{J}$$

$$۱۰^{\circ}\text{C} \text{ شیشه } ۵۰۰\text{g} \rightarrow ۲۵^{\circ}\text{C}$$

$$Q_3 = mc\Delta\theta = ۰/۵ \times ۸۴۰ \times (۲۵ - ۱۰) = ۶۳۰۰\text{J}$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \rightarrow -۱۰\text{C} + ۴۲۰۰ + ۶۳۰۰ = 0$$

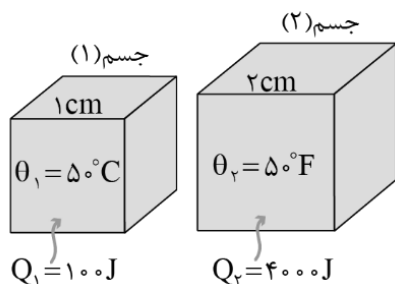
$$\rightarrow ۱۰\text{C} = ۱۰۵۰۰ \rightarrow C = ۱۰۵۰ \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}}$$



۳۹- در شکل زیر، دمای اولیهٔ دو مکعب توپر و هم‌جنس با گرمای ویژه $۴۰۰ \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ مشخص شده است. مطابق شکل، به این دو جسم

گرمای Q_1 و Q_2 را می‌دهیم. اگر دمای نهایی دو جسم برابر باشد، چگالی مادهٔ سازندهٔ مکعب‌ها چند واحد SI است؟ (اجسام

تغییر حالت نمی‌دهند.)



(۱) ۲۵۰۰۰

(۲) ۲۰۰۰۰

(۳) ۲۵۰۰

(۴) ۲۰۰۰

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

جرم جسم (۲)، ۸ برابر جرم جسم (۱) است (چرا؟) و گرمای دریافتی آن، ۴۰ برابر گرمای دریافتی جسم (۱) است، بنابراین برای مقایسهٔ دو جسم می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$

$$\Rightarrow ۴۰ = ۸ \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = ۵$$

گام دوم:

دمای اولیهٔ دو جسم برابر است با:

$$\theta_1 = ۵۰^{\circ}\text{C}, \theta_2 = ۵۰^{\circ}\text{F} = ۱۰^{\circ}\text{C}$$



دمای نهایی دو جسم با هم برابر است، پس اگر این دما را θ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \Delta\theta_1 = \theta - 50 \\ \Delta\theta_2 = \theta - 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{\theta - 10}{\theta - 50}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{\theta - 10}{\theta - 50} \Rightarrow \theta = 60^\circ\text{C}$$

گام آخر:

حال که دمای نهایی را می‌دانیم، چگالی دو جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$Q_1 = m_1 c \Delta\theta_1 = \rho V_1 c \Delta\theta_1$$

$$\Rightarrow 100 = \rho \times 10^{-6} \times 400 \times (60 - 50) \Rightarrow \rho = 25000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



۴۰- دو کره مسی توپر A و B در اختیار داریم که شعاع کره B دو برابر شعاع کره A است. اگر به دو کره گرمای یکسانی بدهیم، تغییر حجم کره A چند برابر تغییر حجم کره B است؟

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{8}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

چون جنس هر دو کره یکسان است پس ρ ، c و β برای هر دو کره برابر است.

$$r_B = 2r_A \xrightarrow{V = \frac{4}{3}\pi r^3} V_B = 8V_A \Rightarrow m = \rho V \xrightarrow{\text{یکسان}} m_B = 8m_A$$

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{mc}$$

$$\Delta V = V_1 \beta \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta = \frac{Q}{mc}} \Delta V = V_1 \beta \frac{Q}{mc}$$

$$\xrightarrow{\text{یکسان } Q, c, \beta} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_{1A}}{V_{1B}} \times \frac{m_B}{m_A} \rightarrow \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A}{8V_A} \times \frac{8m_A}{m_A} = 1$$



نکته

برای مقایسه تغییر حجم دوکره، می‌توانستیم به طور مستقیم از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\begin{cases} \Delta\theta = \frac{Q}{mc} \\ \Delta V = V_1 \beta \Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \Delta V = \frac{V_1 \beta Q}{mc}$$

$$\xrightarrow{\rho = \frac{m}{V_1}} \Delta V = \frac{\beta Q}{\rho c}$$

در این سؤال هر چهار پارامتر ρ ، c ، β و Q یکسان هستند؛ پس بدون محاسبه، تغییر حجم دو کره برابر است.



- ۴۱- درون ظرفی با ظرفیت گرمایی $\frac{J}{K} 900$ ، ضریب انبساط طولی $K^{-1} 2 \times 10^{-5}$ و حجم 500 cm^3 ، مقدار 480 cm^3 از مایعی با ظرفیت گرمایی $\frac{J}{K} 1100$ و ضریب انبساط حجمی $K^{-1} 10^{-3}$ قرار دارد. اگر با گرمکنی با توان خروجی 500 W به مدت 200 s ، مجموعه را گرم کنیم، چند سانتی متر مکعب مایع سرریز می شود؟
- (۱) $2/5$ (۲) $2/8$ (۳) $4/5$ (۴) $4/8$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

افزایش دمای مجموعه برابر است با:

$$Q = (C_1 + C_2) \Delta\theta \Rightarrow P \Delta t = (C_1 + C_2) \Delta\theta$$

$$\rightarrow 500 \times 200 = (900 + 1100) \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 50^\circ \text{C}$$

برای اینکه متوجه شویم چه حجمی از مایع سرریز می شود باید حجم نهایی مایع و ظرف را پس از تغییر دما محاسبه کنیم:

$$V_2 = V_1 + V_1 \beta \Delta\theta = 480 + 480 \times 10^{-3} \times 50 = 504 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = V_1 + V_1 \alpha \Delta\theta = 500 + 500 \times 3 \times 2 \times 10^{-5} \times 50 = 501 \text{ cm}^3$$

حجم ظرف 501 cm^3 و حجم مایع 504 cm^3 می باشد، پس تمام مایع درون ظرف جا نمی گیرد:

$$\text{حجم مایع سرریز شده} = 504 - 501 = 3 \text{ cm}^3$$

دقت کنید که در این سؤال چون حجم اولیه مایع و ظرف یکسان نبوده است، پس نمی توان ΔV مایع و ظرف را به دست آورد و از هم کم کرد.



اگر حجم اولیه مایع و ظرف برابر بود، می توانستیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\Delta V = V_1 (\beta_{\text{مایع}} - \alpha_{\text{ظرف}}) \Delta\theta$$



- ۴۲- چه تعداد از عبارات زیر صحیح هستند؟

الف) تمام جامدات نقطه ذوب معینی دارند که به جنس جسم و فشار وارد بر آن بستگی دارد.

ب) افزایش فشار وارد بر یخ به کاهش نقطه ذوب آن می انجامد.

پ) وجود ناخالصی نقطه انجماد را پایین می آورد.

ت) آهنگ تبخیر سطحی به دما و مساحت سطح مایع بستگی دارد.

ث) با افزایش دمای یک جسم گرمای نهان تبخیر افزایش می یابد.

(۴) ۴

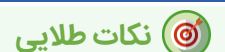
(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(آسان - مفهومی و خط به خط کتاب درسی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳



۱- جامدهای خالص و بلورین نقطه ذوب معینی دارند که به جنس جسم و فشار وارد بر آن بستگی دارد. جامدهای بی شکل مانند شیشه و جامدهای ناخالص مانند قیر نقطه ذوب کاملاً مشخصی ندارند، پیش از ذوب شدن خمیری شکل می شوند و در گستره ای از دما به تدریج ذوب می شوند.

۲- معمولاً افزایش فشار وارد بر جسم سبب بالا رفتن نقطه ذوب جسم می شود اما در برخی مواد مانند یخ افزایش فشار به کاهش نقطه ذوب می انجامد که این در مورد یخ بسیار ناچیز است.

۳- وجود ناخالصی نقطه انجماد را پایین می آورد.

۴- گرمای نهان ویژه ذوب بستگی به جنس جسم دارد.

۵- تا پیش از رسیدن به نقطه جوش مایع، تبخیر به طور پیوسته‌ای از سطح مایع رخ می‌دهد که به آن تبخیر سطحی می‌گویند، آهنگ تبخیر سطحی به دما و مساحت سطح مایع بستگی دارد. در جوش کامل آهنگ تبخیر به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

۶- نقطه جوش هر مایع به جنس و فشار وارد بر آن بستگی دارد. افزایش فشار وارد بر مایع سبب بالا رفتن نقطه جوش آن می‌شود افزودن ناخالصی نیز نقطه جوش را افزایش می‌دهد.

۷- گرمای نهان تبخیر به جنس ماده و دمای آن بستگی دارد و با افزایش دما، گرمای نهان تبخیر آب کاهش می‌یابد.

عبارت‌های ب و پ و ت صحیح هستند و عبارت‌های الف و ث نادرست هستند. جامدهای بی‌شکل مانند شیشه و جامدهای ناخالص مانند قیر نقطه ذوب کاملاً مشخصی ندارند پیش از ذوب شدن خمیری شکل می‌شوند و در گستره‌ای از دما به تدریج ذوب می‌شوند؛ همچنین با افزایش دمای یک جسم گرمای نهان تبخیر آن کاهش می‌یابد.



۴۳- m کیلوگرم آب 60°C را با m' کیلوگرم بخار آب 100°C درون محفظه‌ای قرار می‌دهیم که فقط تبادل گرمایی بین آب و بخار

صورت گیرد. اگر پس از رسیدن به تعادل گرمایی جرم آب باقی مانده ۲ برابر جرم بخار باقی مانده باشد، نسبت $\frac{m}{m'}$ کدام است؟

$$(c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}, L_V = 2268 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}})$$

بخار آب

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{18}{11} \quad (3)$$

$$\frac{15}{13} \quad (2)$$

$$\frac{7}{9} \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

خارج کشور ریاضی ۹۹

یک گرمکن با توان گرمایی ثابت در مدت ۱۰ دقیقه، ۱۰۰ گرم یخ صفر درجه را به آب صفر درجه تبدیل می‌کند. این گرمکن همین آب را تقریباً

در مدت چند دقیقه به بخار آب 100°C درجه سلسیوس تبدیل می‌کند؟ $(c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}, L_V = 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, L_F = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}})$

$$80 \quad (4)$$

$$56 \quad (3)$$

$$40 \quad (2)$$

$$26 \quad (1)$$

$$Q_1 = Pt_1 = mL_F \quad (1)$$

$$Q_2 = Pt_2 = mc\Delta\theta + mL_V \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{c\Delta\theta + L_V}{L_F} \rightarrow \frac{t_2}{10 \text{ min}} = \frac{4/2 \times 100 + 2256}{334} = \frac{2676}{334} = 8 \rightarrow t_2 = 80 \text{ min}$$

پاسخ: گزینه ۴

چون در حالت تعادل مخلوط آب و بخار داریم پس دمای تعادل 100°C است داریم:

$$mc\Delta\theta = m \times 4/2 \times 40 = 168m \text{ kJ}$$

برای تأمین گرمای فوق باید x کیلوگرم بخار آب 100°C به آب 100°C تبدیل شود پس:

$$x \times L_V = 168m \rightarrow 2268x = 168m \rightarrow x = \frac{168m}{2268} \rightarrow x = \frac{2}{27}m$$

$$\text{جرم آب نهایی} = m + x = m + \frac{2}{27}m$$

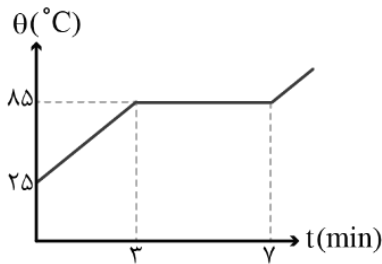
$$\text{جرم بخار آب نهایی} = m' - x = m' - \frac{2}{27}m$$

طبق فرض مسأله داریم:

$$m + \frac{2}{27}m = 2 \left(m' - \frac{2}{27}m \right) \rightarrow \frac{11}{9}m = 2m' \rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{18}{11}$$



۴۴- به جسم جامدی در دمای 25°C با گرمکنی با توان خروجی P گرما می‌دهیم و نمودار تغییرات دمای جسم مطابق شکل است.



اگر گرمای ویژه نهان ذوب این جسم $240 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ باشد، گرمای ویژه جسم چند واحد SI است؟

- (۱) ۳۰۰۰
- (۲) ۴۰۰۰
- (۳) ۴
- (۴) ۳

(متوسط - نموداری - ۱۰۰۴)

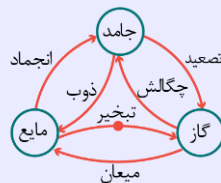
پاسخ: گزینه ۱

تغییر حالت اجسام

در این بخش به بررسی تغییر حالت جسم در اثر گرما می‌پردازیم.

گرمای تغییر حالت:

در این حالت، گرمایی که جسم می‌گیرد یا از دست می‌دهد باعث تغییر دمای آن نمی‌شود، بلکه باعث تغییر فاز (حالت) آن خواهد شد. طر‌ح‌واره زیر تغییر حالت‌هایی که ممکن است رخ دهند را نشان می‌دهد.



نکته: تغییر فازها می‌توانند گرماگیر ($Q > 0$) یا گرماده ($Q < 0$) باشند.

گرماده: انجماد، چگالش، میعان

تغییر فاز

گرماگیر: ذوب، تصعید، تبخیر

ذوب و انجماد:

در فرایند ذوب، جسم جامد گرما می‌گیرد تا در دمای ثابت، حالت آن از جامد به مایع تغییر کند. گرما در این حالت برابر است با:

$$Q_F = +mL_F \quad L_F \text{ یکای: } \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

در رابطه بالا، L_F گرمای نهان ویژه ذوب و انجماد است که وابسته به جنس ماده است.

گرمای نهان ویژه ذوب: مقدار گرمایی است که یک کیلوگرم از جامد می‌گیرد تا بدون تغییر دما به مایع تبدیل شود.

در فرایند انجماد، جسم مایع گرما از دست می‌دهد تا در دمای ثابت، حالت آن از مایع به جامد تبدیل شود. گرمای مبادله شده در این حالت، قرینه گرمای ذوب است.

$$Q_{\text{انجماد}} = -mL_F \quad Q_{\text{انجماد}} < 0$$

مثال: به 2 kg یخ با دمای -20°C ، چند ژول گرما دهیم تا به آب با دمای 80°C تبدیل شود؟

$$\left(L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$$

خب از این‌جا به بعد مسائل می‌تونن هم گرمای تغییر دما داشته باشن و هم گرمای تغییر حالت، پس باید به نوبت این گرماها محاسبه بشن...

مطابق شکل زیر می‌توانیم گرمای مورد نیاز را به دست آوریم.

$$Q_1 = mc \Delta\theta = 2 \times 2100 \times 20 = 20 \times 4200 \text{ J}$$

$$Q_2 = mL_F = 2 \times 336000 = 160 \times 4200 \text{ J}$$

$$Q_3 = mc \Delta\theta = 2 \times 4200 \times 80 = 160 \times 4200 \text{ J}$$

$$\rightarrow Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 340 \times 4200 \text{ J}$$

تبخیر و میعان:

در فرایند تبخیر، جسم مایع گرما می‌گیرد تا در دمای ثابت، حالت آن از مایع به بخار (گاز) تغییر کند. دقت کنید که تبخیر در هر دمایی می‌تواند رخ دهد. برای محاسبه گرمای تبخیر داریم:

$$Q_V = mL_V \quad L_V \text{ یکای: } \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

در رابطه بالا، L_V گرمای نهان ویژه تبخیر و میعان است که وابسته به جنس ماده و دمای آن است.

گرمای نهان ویژه تبخیر: مقدار گرمایی است که یک کیلوگرم از مایع می‌گیرد تا بدون تغییر دما به بخار تبدیل شود.

در فرایند میعان که برعکس تبخیر است، جسم گرما از دست می‌دهد تا در دمای ثابت از گاز به مایع تبدیل شود. گرمای مبادله شده در این حالت، قرینه گرمای تبخیر است و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Q_{\text{میعان}} = -mL_V \quad Q_{\text{میعان}} < 0$$

در ۳ دقیقه اول، دمای جسم جامد بالا می‌رود و در ۴ دقیقه بعدی، جسم ذوب می‌شود.

$$\text{۳ دقیقه اول: } Q_1 = mc\Delta\theta \rightarrow P \times 3 = mc \times (15 - 25)$$

$$\text{۴ دقیقه بعدی: } Q_2 = mL_F \rightarrow P \times 4 = m \times 240 \times 10^3$$

با تقسیم رابطه دوم بر رابطه اول داریم:

$$\frac{4P}{3P} = \frac{240 \times 10^3}{c \times 60} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4000}{c} \rightarrow c = 3000 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$



۴۵- درون ۲kg آب 20°C ، m کیلوگرم یخ صفر درجه سلسیوس می‌اندازیم و پس از گذشت زمان طولانی، دمای تعادل برابر 5°C می‌شود. از مخلوط بدست آمده حداقل چند کیلوژول گرما بگیریم تا به طور کامل یخ بزند؟

$$(L_F = 330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}, c_{\text{آب}} = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}})$$

۸۴۸ (۴)

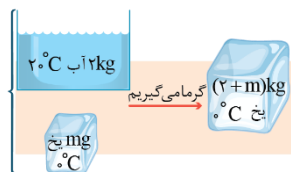
۷۷۲/۸ (۳)

۸۸۴ (۲)

۸۲۷/۲ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱



در ابتدا ۲kg آب 20°C و m کیلوگرم یخ صفر درجه سلسیوس داریم که می‌خواهند به تعادل برسند. سپس از مجموعه گرما می‌گیریم که کل آن به یخ صفر درجه سلسیوس تبدیل شود.

اگر دقت کنید در واقع برای یخ اتفاقی نیفتاده است و کافی است فقط محاسبه کنیم چه گرمایی باید از آب گرفته شود تا یخ بزند. در واقع اصلاً نیازی نیست که جرم یخ اولیه را محاسبه کنیم.

$$Q = |m_{\text{آب}} c \Delta\theta_{\text{آب}}| + m_{\text{آب}} L_F = 2 \times 4180 \times 20 + 2 \times 330000$$

$$\rightarrow Q = 167200 + 660000 = 827200 \text{ J} = 827 / 2 \text{ kJ}$$



۴۶- درون ۸۰۰ گرم مخلوط آب و یخ در حال تعادل، گلوله‌ای آهنی با ظرفیت گرمایی $\frac{J}{K} \cdot 800$ و دمای $91^{\circ}C$ می‌اندازیم. اگر دمای تعادل مجموعه برابر $280K$ شود، جرم یخ اولیه چند برابر جرم گلوله آهنی بوده است؟

$$(L_F = 336 \frac{J}{g}, c_{\text{آب}} = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}, c_{\text{آهن}} = 500 \frac{J}{kg \cdot K})$$

$$\frac{13}{100} \quad (4)$$

$$\frac{16}{100} \quad (3)$$

$$\frac{13}{160} \quad (2)$$

$$\frac{16}{130} \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲



در سؤالاتی که دمای تعادل نهایی معلوم است، راحت‌ترین روش حل مسئله تعادل، نوشتن پایستگی انرژی است.

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

ابتدا دقت کنید که دمای تعادل برابر $280K$ معادل $7^{\circ}C$ است. جرم گلوله به راحتی قابل محاسبه است:

$$m_{\text{گلوله}} = \frac{C}{c} = \frac{800}{500} = 1.6 \text{ kg} = 1600 \text{ g}$$

اگر فرض کنیم جرم یخ اولیه برابر m گرم بوده و جرم آب $m - 800$ گرم بوده است، با استفاده از پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{یخ}} + Q_{\text{گلوله}} = 0$$

$$\rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}} + m_{\text{یخ}} L_F + m_{\text{یخ}} c_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}} + C_{\text{گلوله}} \Delta\theta_{\text{گلوله}} = 0$$

$$\rightarrow (800 - m) \times 4 / 2 \times 7 + m \times 336 + m \times 4 / 2 \times 7 + 800 \times (-84) = 0 \rightarrow 800 \times 7 + m \times 80 - 800 \times 20 = 0$$

$$\rightarrow 70 + m - 200 = 0 \rightarrow m = 130 \text{ g} \rightarrow \frac{m_{\text{یخ}}}{m_{\text{گلوله}}} = \frac{130}{1600} = \frac{13}{160}$$

۴۷- خورشید با آهنگ ۱۹ وات به صفحه‌ای فلزی به جرم 5 kg گرما می‌دهد. روش انتقال این گرما از سطح خورشید تا صفحه فلزی چیست و در مدت یک ساعت، دمای صفحه چند درجه سلسیوس بالا می‌رود؟ (گرمای ویژه فلز برابر $\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 380$ است.)

$$18 - \text{همرفت} \quad (4)$$

$$18 - \text{تابش} \quad (3)$$

$$36 - \text{همرفت} \quad (2)$$

$$36 - \text{تابش} \quad (1)$$

(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گرمای خورشید از طریق روش تابش به زمین می‌رسد. برای محاسبه افزایش دمای صفحه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ Q = P\Delta t \end{cases} \Rightarrow P\Delta t = mc\Delta\theta \Rightarrow 19 \times 3600 = 5 \times 380 \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 36^{\circ}C$$

۴۸- اگر در حجم ثابت، دمای مقدار معینی گاز کامل را افزایش دهیم، فشار و چگالی آن به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کنند؟

$$4 - \text{کاهش} - \text{ثابت}$$

$$3 - \text{افزایش} - \text{کاهش}$$

$$2 - \text{کاهش} - \text{کاهش}$$

$$1 - \text{افزایش} - \text{ثابت}$$

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

معادله حالت گاز کامل (قانون گازهای کامل)

۱- برای یک گاز کامل (رقیق)، رابطه مقابل برقرار است که به آن معادله حالت (قانون گازهای کامل) می‌گویند:

$$PV = nRT$$

$$V : \text{حجم گاز برحسب مترمربع} (m^3)$$

$$T : \text{دمای گاز برحسب کلوین} (K)$$

$$P : \text{فشار گاز برحسب پاسکال} (Pa)$$

$$n : \text{تعداد مول گاز} (mol)$$

R : ثابت جهانی گازها که برابر با $(۸ / ۳۱۴ \frac{J}{mol.k})$ می‌باشد.

۲- مطابق معادله حالت، برای مقایسه گاز کامل در دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{PV}{nT} = R = \text{مقداری ثابت} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

از رابطه فوق می‌توان قوانین زیر را برای مقدار معینی گاز (n ثابت) نتیجه گرفت:

الف: قانون گازهای کامل در فشار ثابت. اگر فشار گاز، ثابت باشد:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

ب: قانون گازهای کامل در حجم ثابت

اگر حجم گاز، ثابت باشد:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

ج: قانون گازهای کامل در دمای ثابت

اگر دمای گاز، ثابت باشد:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

گام اول:

با استفاده از قانون گازهای کامل در حجم ثابت داریم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \xrightarrow{T_2 > T_1} \frac{P_2}{P_1} > 1 \Rightarrow P_2 > P_1 \rightarrow \text{فشار گاز افزایش می‌یابد}$$

گام دوم:

مطابق رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ ، چون جرم و حجم گاز ثابت هستند، بنابراین چگالی آن هم ثابت می‌ماند.



۴۹- درون استوانه یک تلمبه به طول ۳۰cm که راه‌های ورودی و خروجی هوا به آن بسته است، گازی کامل وجود دارد. در دمای ثابت، طول استوانه را ۶cm افزایش می‌دهیم و فشار پیمانه‌ای گاز ۵۰ درصد تغییر می‌کند. در ادامه و در دمای ثابت، چند درصد از گاز درون استوانه را تخلیه کنیم تا فشار پیمانه‌ای آن صفر شود؟

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

(سخت - محاسباتی و ترکیبی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

با رساندن طول استوانه از ۳۰cm به ۳۶cm، حجم گاز $\frac{۳۶}{۳۰}$ برابر می‌شود، بنابراین با استفاده از قانون گازها در دمای ثابت می‌توان نوشت:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{۳۶}{۳۰} \rightarrow P_1 = \frac{۶}{۵} P_2$$

بنابراین فشار پیمانه‌ای گاز در دو حالت برابر است با:

$$\text{حالت اولیه: } P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_1 - P_0 = \frac{۶}{۵} P_2 - P_0$$

$$\text{حالت نهایی: } P'_{\text{پیمانه‌ای}} = P_2 - P_0$$

طبق متن سؤال، فشار پیمانه‌ای در حالت دوم، ۵۰ درصد کمتر از حالت اول است، بنابراین داریم:

$$\frac{P'_{\text{پیمانه‌ای}}}{P_{\text{پیمانه‌ای}}} = \frac{50}{100} \rightarrow \frac{P_2 - P_0}{\frac{6}{5}P_2 - P_0} = \frac{50}{100}$$

$$\rightarrow 2P_2 - 2P_0 = \frac{6}{5}P_2 - P_0 \rightarrow \frac{4}{5}P_2 = P_0 \rightarrow P_2 = \frac{5}{4}P_0$$

بنابراین فشار گاز در حالت نهایی $\frac{5}{4}$ برابر فشار هوای محیط است.

گام آخر:

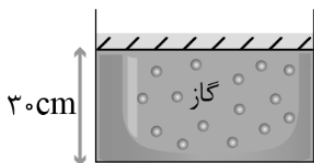
برای آن که فشار پیمانه‌ای گاز صفر شود، باید کاری کنیم که فشار آن با فشار هوای محیط برابر شود. با توجه به این که $P_2 = \frac{5}{4}P_0$ است،

باید کاری کنیم تا فشار گاز $\frac{4}{5}$ برابر شود، پس کافی است طبق رابطه $PV = nRT$ ، مقدار گاز موجود در ظرف را $\frac{4}{5}$ برابر کنیم تا فشار هم

$\frac{4}{5}$ برابر شود و در نتیجه فشار پیمانه‌ای صفر شود. به عبارت دیگر باید $\frac{1}{5}$ از گاز (معادل ۲۰٪) را از محفظه خارج کنیم.



۵۰- مطابق شکل، درون سیلندری گاز با دمای 300K در حال تعادل قرار دارد. اگر دمای گاز به آرامی 90°F افزایش یابد، پیستون سبک به اندازه x_1 بالا می‌رود و اگر دمای گاز نسبت به دمای اولیه، به آرامی 20K کاهش یابد، پیستون نسبت به حالت اولیه به اندازه x_2 پایین می‌رود. حاصل $x_2 - x_1$ برابر چند سانتی‌متر است؟



(۱) ۳-

(۲) ۳

(۳) ۵-

(۴) ۵

(متوسط - محاسباتی و ترکیبی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گاز آرمانی

به طور کلی اگر یک گاز آرمانی از حالت (۱) (n_1, P_1, V_1, T_1) به حالت (۲) (n_2, P_2, V_2, T_2) برود، داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

اگر در تغییر حالت از (۱) به (۲) کمیتی تغییر نکند، در رابطه نمی‌آید. برای مثال اگر تعداد مول‌های گاز ثابت باشد، می‌توان رابطه را به صورت

$$\text{نوشت.} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

اگر دمای گاز 90°F افزایش یابد، داریم:

$$\Delta T = \frac{5}{9} \Delta F = \frac{5}{9} \times 90 = 50\text{K} \rightarrow T_2 = 300 + 50 = 350\text{K}$$

فشار گاز همواره در حال تعادل برابر با فشار هوای محیط است، بنابراین با نوشتن قانون گازها در فشار ثابت داریم:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow \frac{Ah_1}{T_1} = \frac{Ah_2}{T_2} \rightarrow \frac{30}{300} = \frac{h_2}{350} \rightarrow h_2 = 35\text{cm}$$

بنابراین پیستون به اندازه $x_1 = 5\text{cm}$ بالا رفته است.



اگر دمای گاز ۲۰K کاهش یابد نیز می توان نوشت:

$$T_2 = T_1 - 20 = 300 - 20 = 280K$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow \frac{h_1}{T_1} = \frac{h_2}{T_2} \rightarrow \frac{30}{300} = \frac{h_2}{280} \rightarrow h_2 = 28cm$$

بنابراین پیستون به اندازه $x_2 = 2cm$ پایین رفته است و حاصل $x_2 - x_1$ برابر $3cm -$ است.





۵۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) آب اقیانوس‌ها و دریاها مخلوطی همگن بوده و مجموع جرم مواد حل شده در آن‌ها در طول زمان تقریباً ثابت است.
- (۲) فراوان‌ترین آنیون موجود در آب دریاها، در سرم فیزیولوژی وجود داشته و در ساختار خود ۶ الکترون با $1 = l$ دارد.
- (۳) آب شور دریاچه‌ها، برخلاف آب موجود در کوه‌های یخ و رطوبت موجود در خاک، از جمله منابع غیر اقیانوسی آب است.
- (۴) با افزودن مقداری از آب دریای مدیترانه به آب دریای سرخ، مقدار درصد جرمی نمک در آب دریای سرخ افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۳)

آب اقیانوس‌ها و دریاها مخلوطی همگن است که اغلب مزه‌ای شور دارد؛ زیرا مقدار قابل توجهی از نمک‌های گوناگون در آن حل شده است. جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است؛ زیرا همان مقدار موادی که از سنگ‌کره به آب‌کره وارد می‌شود، از آب‌کره نیز به سنگ‌کره وارد می‌شود. بر این اساس، کره زمین را می‌توان سامانه‌ای بزرگ در نظر گرفت که شامل چهار بخش هواکره، آب‌کره، سنگ‌کره و زیست‌کره است. نمودار زیر، نمایی از این چهار بخش مختلف را نشان می‌دهد:

بخش اصلی زمین

زیست‌کره: شامل جانداران روی کره زمین است که در واکنش‌های آن‌ها، درشت مولکول‌ها، نقش اساسی ایفا می‌کنند.

هواکره: از مولکول‌های کوچک شامل نیتروژن، اکسیژن و ... تشکیل شده است.

سنگ‌کره: از مواد جامد مانند ماسه، نمک‌ها و ... تشکیل شده است.

آب‌کره: از مولکول‌های کوچک آب، یون‌ها و ... تشکیل شده است.

درون این سامانه و بین این چهار بخش، پیوسته مواد گوناگونی مبادله می‌شود. برای نمونه سالانه حجم عظیمی از آب دریاها بخار و وارد هواکره می‌شود و به‌صورت بارش در آب‌کره یا سنگ‌کره فرود می‌آید. جانداران آبرزی سالانه میلیاردها تن کربن دی‌اکسید را وارد هواکره و مقدار بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب را مصرف می‌کنند. فعالیت‌های آتشفشانی سبب می‌شود گازهای گوناگون و مواد شیمیایی جامد به‌صورت گرد و غبار وارد هواکره شوند. لاشه جانوران و گیاهان بر اثر واکنش‌های شیمیایی تجزیه شده و به‌صورت مولکول‌های کوچک‌تری وارد آب‌کره، هواکره یا سنگ‌کره می‌شوند.

در رابطه با آب‌کره زمین، به نکات زیر توجه کنید.

☆ در حدود ۷۵٪ سطح زمین از آب پوشیده شده است؛ به همین علت در فضا به رنگ آبی دیده می‌شود. بخش عمده این آب در اقیانوس‌ها و دریاها توزیع شده است. اگر زمین مسطح بود، همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر، آب می‌پوشاند.

☆ آب اقیانوس‌ها و دریاها مخلوطی همگن است که اغلب مزه‌ای شور دارد؛ زیرا مقدار قابل توجهی از نمک‌های گوناگون در آن حل شده است. برآوردها نشان می‌دهد که 5×10^{16} تن نمک در آب اقیانوس‌ها و دریاها وجود دارد و سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره نیز وارد آب‌کره می‌شوند. از آن‌جا که جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است، پس باید همین مقدار ماده نیز از آب دریاها و اقیانوس‌ها خارج شود.

☆ در حدود ۹۷/۲ درصد آب‌کره در اقیانوس‌ها و ۲/۸ درصد آن به‌صورت زیر وجود دارد:

مجموعه آب دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب > آب نهرها و جوی‌ها > آب‌های زیرزمینی > کوه‌های یخ (۲/۱۵٪) : منابع غیر اقیانوسی آب‌کره

☆ آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است، زیرا هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همه مواد حل شده در آب از آن جدا می‌شود. این فرایند، الگویی برای تهیه آب خالص است. فرایندی که تقطیر و فراورده آن آب مقطر نام دارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ فراوان‌ترین آنیون موجود در آب دریاها، یون کلرید است. یون کلرید، در سرم فیزیولوژی (محلول رقیق آب نمک) وجود داشته و در ساختار خود ۱۲ الکترون در زیرلایه‌های p (الکترون‌هایی با $l = 1$) دارد. آرایش الکترونی یون کلرید به صورت زیر است:

$${}_{17}Cl^{-} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$$

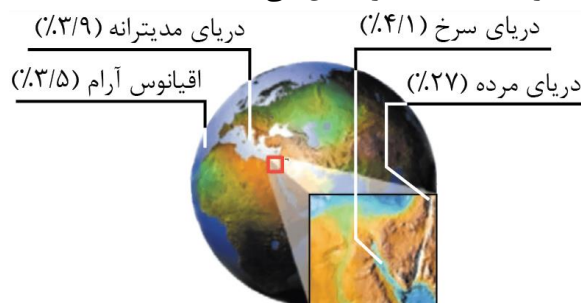
نکات زیر را راجع به یون‌های موجود در آب دریا به خاطر بسپارید.

- ★ کاتیون عنصرهای گروه اول و دوم جدول دوره‌ای در آب دریا وجود دارند.
- ★ مقدار یون کلرید از بقیه آنیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم:
- ★ توجه داریم که یون سولفات (SO_4^{2-})، فراوان‌ترین آنیون چنداتیمی موجود در آب دریاها است. پس از یون سولفات، یون کربنات (CO_3^{2-}) فراوان‌ترین آنیون چنداتیمی موجود در آب دریاها است.
- ★ مقدار یون سدیم از بقیه کاتیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم:

مقدار کاتیون‌ها : $Na^{+} > Mg^{2+} > Ca^{2+} > K^{+}$

۳ آب شیرین و آب شور دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب موجود در هوا، آب‌های زیرزمینی و آب موجود در کوه‌های یخ، از جمله منابع غیراقیانوسی آب به‌شمار می‌روند. این منابع آبی، تقریباً $\frac{2}{8}$ درصد از کل آب‌های موجود در زمین را تشکیل می‌دهند.

۴ تصویر زیر، درصد جرمی نمک در آب دریا‌های مختلف را نشان می‌دهد:



چون درصد جرمی نمک در آب دریای مدیترانه در مقایسه با آب دریای سرخ کمتر است، با افزودن مقداری از آب دریای مدیترانه به آب دریای سرخ، مقداری از غلظت نمک‌ها در آب دریای سرخ کاسته شده و درصد جرمی نمک در این نمونه از آب کاهش می‌یابد.



۵۲- چند مورد از مطالب زیر، جملهٔ روبه‌رو را به‌درستی تکمیل می‌کنند؟ «با افزودن نمک به محلول، یک نمک نامحلول و یک نمک کم‌محلول در آب تولید می‌شود.»

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| الف - نقره سولفات، کلسیم کلرید | ب - کلسیم هیدروکسید، منیزیم کلرید |
| ج - کلسیم کلرید، منیزیم سولفات | د - کلسیم برمید، آمونیوم کربنات |
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) |

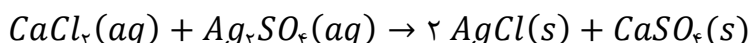
(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

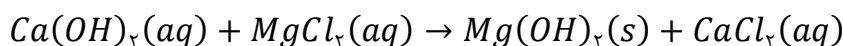
فقط مورد (الف) درست است. واکنش انجام شده در هر مورد را می‌نویسیم:

بررسی موارد:

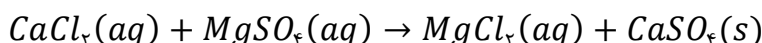
الف نمک کلسیم سولفات کم محلول و نمک نقره کلرید، نامحلول است.



پ در این واکنش مادهٔ کم محلول تشکیل نمی‌شود. پیش‌تر، در فرایند استخراج منیزیم، گفته شده که منیزیم هیدروکسید نمکی نامحلول در آب است.

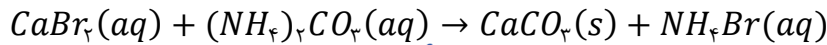


ج در این واکنش مادهٔ نامحلول تشکیل نمی‌شود.





در این واکنش ماده کم محلول تشکیل نمی‌شود.



۵۳- مقدار ۳۰/۳ گرم پتاسیم نیترات در نمونه‌ای به جرم ۱۵ کیلوگرم از آب خارج شده از یک بیمارستان حل شده است. غلظت یون پتاسیم در این محلول بر حسب ppm کدام است؟

($K = ۳۹$ و $O = ۱۶$ و $N = ۱۴ : g.mol^{-1}$)

۱۲۴۰ (۴)

۱۸۶۰ (۳)

۷۸۰ (۲)

۲۰۲۰ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

در قدم اول، جرم یون پتاسیم موجود در ۳۰/۳ گرم پتاسیم نیترات را محاسبه می‌کنیم.

$$? g K^+ = ۳۰/۳ KNO_3 \times \frac{۱ mol KNO_3}{۱۰۱ g KNO_3} \times \frac{۱ mol K^+}{۱ mol KNO_3} \times \frac{۳۹ g K^+}{۱ mol K^+} = ۱۱/۷ g$$

محاسبه غلظت ماده

برای محاسبه غلظت یک ماده بر حسب ppm ، اگر مقیاس جرمی محلول و حل شونده یکسان باشد (به عنوان مثال، هر دو مورد در مقیاس گرم یا کیلوگرم بیان شده باشند)، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^6$$

برای محاسبه غلظت یک ماده بر حسب ppm ، اگر جرم حل شونده بر حسب میلی‌گرم و جرم محلول بر حسب کیلوگرم باشد، کار راحت‌تر است و از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$ppm = \frac{\text{میلی گرم حل شونده}}{\text{کیلو گرم محلول}}$$

با توجه به روابط بالا، غلظت یون پتاسیم را به دست می‌آوریم:

$$ppm = \frac{۱۱/۷ g K^+}{۱۵۰۰۰ g \text{ محلول}} \times ۱۰^6 = ۷۸۰$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت یون پتاسیم در محلول مورد نظر برابر با $۷۸۰ ppm$ می‌شود.



۵۴- شمار یون‌های موجود در ۲ لیتر محلول ۶/۲۵ مولار آمونیوم فسفات، چقدر از شمار اتم‌های اکسیژن در ۸۰ لیتر گاز اوزون با چگالی ۴ گرم بر لیتر، بیشتر است؟ ($O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)

$$۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۵} \quad (۲)$$

$$۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۳} \quad (۱)$$

$$۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳} \quad (۴)$$

$$۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵} \quad (۳)$$

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا شمار مول‌های نمک آمونیوم فسفات را با استفاده از غلظت مولار آن به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{مول نمک}}{\text{حجم محلول}} = \text{مولار} \rightarrow \frac{x}{۶/۲۵} = \frac{x}{۲} \rightarrow x = \frac{۱۰۰}{۸}$$

برای محاسبات سریع‌تر، کسرهای معادل اعداد زیر را به خاطر بسپارید!

$$۰/۲۵ = \frac{۱}{۴} \quad ۰/۷۵ = \frac{۳}{۴} \quad ۰/۱۲۵ = \frac{۱}{۸} \quad ۰/۳۷۵ = \frac{۳}{۸} \quad ۰/۰۶۲۵ = \frac{۱}{۱۶}$$

با توجه به درسنامه بالا، برای محاسبات سریع‌تر، به جای عدد ۶/۲۵، می‌توانیم کسر $\frac{۱۰۰}{۸}$ را بنویسیم و سپس در ۲ ضرب کنیم. پس مول نمک آمونیوم فسفات برابر با $\frac{۱۰۰}{۸}$ است. شمار یون‌های موجود در آن برابر است با:

$$? \text{ یون} = \frac{۱۰۰}{۸} mol (NH_4)_3PO_4 \times \frac{۴ mol \text{ یون}}{۱ mol (NH_4)_3PO_4} \times \frac{۰/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۱ mol \text{ یون}} = ۵۰ \times ۰/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$$



حال شمار اتم‌های اکسیژن را در نمونه اوزون محاسبه می‌کنیم:

$$O = 80 \text{ L } O_3 \times \frac{4 \text{ g } O_3}{1 \text{ L } O_3} \times \frac{1 \text{ mol } O_3}{48 \text{ g } O_3} \times \frac{2 \text{ mol } O}{1 \text{ mol } O_3} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} \text{ O}}{1 \text{ mol } O} = 20 \times 6/0.2 \times 10^{23}$$

پس اختلاف آن‌ها برابر است با: $50 \times 6/0.2 \times 10^{23} - 20 \times 6/0.2 \times 10^{23} = 30 \times 6/0.2 \times 10^{23} = 1/80.6 \times 10^{25}$



۵۵- کدام مورد درست است؟

- (۱) در هر محلول، درصد جرمی حلال از درصد جرمی حل‌شونده بیشتر است.
- (۲) در یک نمونه از هوای خشک و پاک، گازی با بیشترین درصد حجمی، حلال محسوب می‌شود.
- (۳) در آزمایشگاه، اندازه‌گیری حجم یک مایع ساده‌تر از جرم بوده و در مخرج کسر ppm حجم محلول قرار می‌گیرد.
- (۴) دستگاه گلوکومتر جرم گلوکز حل شده در خون را با واحد میلی گرم بر دسی گرم اندازه‌گیری می‌کند.

(آسان - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول‌های آن بیشتر است. هوای پاک که تنفس می‌کنیم، محلولی از گازها است. هر محلول از دو جزء حلال و حل‌شونده تشکیل شده است. در یک نمونه از هوای خشک و پاک، گاز با بیشترین درصد حجمی (نیترژن)، بیشترین مقدار مول را داشته و حلال محسوب می‌شود.

محلول

محلول، مخلوطی همگن از دو یا چند ماده بوده که حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی در سرتاسر آن یکسان و یکنواخت است. محلول‌ها کاربردهای فراوانی در زندگی ما دارند. برخی محلول‌ها مانند سرم فیزیولوژی رقیق و برخی مانند گلاب دو آتش غلیظ هستند. هنگامی که گفته می‌شود محلولی غلیظ است یعنی مقدار حل‌شونده‌ها در آن زیاد است. خواص محلول‌ها به خواص حلال، حل‌شونده و مقدار هر یک از آن‌ها بستگی دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول‌های آن بیشتر است. برای مثال در محلول دارای ۲ مول آب و یک مول استون، درصد جرمی استون بیشتر است اما به دلیل مول بیشتر آب، آب به‌عنوان حلال معرفی می‌شود.
- ۳) برای بیان ساده‌تر غلظت محلول‌های بسیار رقیق مانند غلظت کاتیون‌ها و آنیون‌ها در آب معدنی، آب آشامیدنی، آب دریا، بدن جانداران، بافت‌های گیاهی و مقدار آلاینده‌های هوا از کمیتی به نام قسمت در میلیون یا ppm استفاده می‌کنیم. این کمیت نشان می‌دهد در یک میلیون گرم از محلول، چند گرم حل‌شونده وجود دارد. تجربه نشان می‌دهد که اندازه‌گیری حجم یک مایع به ویژه در آزمایشگاه، آسان‌تر از جرم آن است. دقت کنید در مخرج کسر ppm جرم محلول قرار می‌گیرد.
- ۴) دستگاه اندازه‌گیری قند خون گلوکومتر نام دارد. این دستگاه میلی گرم گلوکز را در هر دسی‌لیتر (dL) از خون نشان می‌دهد. دقت کنید که هر دسی‌لیتر برابر ۱۰۰ میلی‌لیتر می‌باشد. برای تبدیل غلظت گلوکومتر به غلظت مولی قند خون، عدد دستگاه را تقسیم بر ۱۸۰۰۰ می‌کنیم.



۵۶- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) در میان ۸ یون فراوان آب دریا، یونی چند اتمی با ساختار فضایی مشابه آمونیاک وجود دارد.
- (۲) آب آشامیدنی، مخلوطی زلال و همگن بوده که حاوی مقدار کمی از یون‌های گوناگون است.
- (۳) کوه‌های یخ، ۲/۱۵ درصد از منابع غیر اقیانوسی آب کره را تشکیل می‌دهند.
- (۴) آب باران با فرایند تقطیر تولید شده و کاملاً خالص می‌باشد.



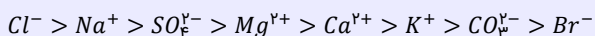
(متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

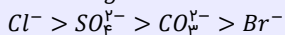
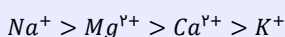
آب آشامیدنی، مخلوطی زلال و همگن بوده که حاوی مقدار کمی از یون‌های گوناگون است. برخی از این یون‌ها به‌طور طبیعی در آب حل شده و برخی دیگر در مراکز تأمین آب آشامیدنی سالم به آن افزوده می‌شود. برای نمونه به آب آشامیدنی، مقدار بسیار کم و مناسب یون فلوئورید می‌افزایند؛ زیرا وجود این یون سبب حفظ سلامت دندان‌ها می‌شود. به درسنامه زیر دقت کنید:

مقدار یون‌های موجود در آب دریا

ترتیب مقدار یون‌های موجود در آب دریا (هم کاتیون و هم آنیون) به‌صورت زیر است:

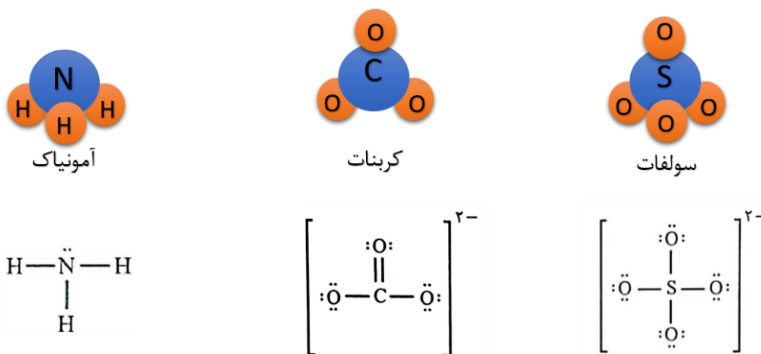


مقایسه کاتیون‌ها و آنیون‌ها، به‌صورت جداگانه نیز در زیر آمده است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

در میان ۸ یون فراوان آب دریا، دو آنیون سولفات و کربنات، چند اتمی هستند. ساختار لوویس و ساختار فضایی این دو یون و همچنین آمونیاک را در شکل زیر می‌بینید:



همان‌طور که می‌بینید، ساختار فضایی هیچ کدام از دو یون سولفات و کربنات، مشابه آمونیاک نیستند.

۹۷/۲٪ آب کره در اقیانوس‌ها و ۲/۸٪ آن به‌صورت زیر وجود دارد:

مجموعه آب دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب > آب نهرها و جوی‌ها > آب‌های زیرزمینی > کوه‌های یخ (۲/۱۵٪)

پس کوه‌های یخ، ۲/۱۵ درصد از کل آب کره و نه فقط منابع غیراقیانوسی را تشکیل می‌دهند.

آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است، زیرا هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همه مواد حل شده در آب از آن جدا می‌شود. این فرایند، الگویی برای تهیه آب خالص است. فرایندی که تقطیر و فراورده آن آب مقطر نام دارد.



۵۷- در شرایط استاندارد، یک نمونه از گاز هیدروژن یدید به حجم ۳۳/۶ لیتر را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را با استفاده از آب خالص به ۶۴۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر چگالی محلول ایجاد شده برابر با $1/25 \text{ g.mL}^{-1}$ باشد، درصد جرمی حل‌شونده در این محلول چقدر می‌شود؟ ($H = 1$ و $I = 127$)

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)

۲۴ (۲)

۳۲ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از رابطه زیر، به راحتی می‌توانیم درصد جرمی حل‌شونده در محلول را محاسبه کنیم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{غلظت مولی محلول} \times (\text{جرم مولی})}{\text{چگالی} \times 10} \Rightarrow \text{درصد جرمی} = \frac{\text{چگالی محلول} \times \text{درصد جرمی} \times 10}{\text{غلظت مولی}}$$



برای این منظور، ابتدا باید غلظت مولی محلول را به دست بیاوریم. می دانیم که در شرایط استاندارد، هر مول از گازهای گوناگون حجمی معادل ۲۲/۴ لیتر یا ۲۲۴۰۰ میلی لیتر دارند؛ بنابراین برای محاسبه تعداد مول نمونه هیدروژن یدید، باید حجم نمونه این گاز را در شرایط استاندارد (۳۳/۶ L) بر حجم یک مول گاز در شرایط استاندارد (۲۲/۴ L) تقسیم کنیم. با توجه به این موضوع، مولاریته نمونه گاز هیدروژن یدید را محاسبه می کنیم:

$$\text{غلظت مولار (مولاریته)} = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{محلول حجم (L)}} \Rightarrow \frac{\frac{33/6 \text{ L HI}}{22/4}}{0.64 \text{ L محلول}} = \frac{1/5}{0.64} \text{ mol.L}^{-1}$$

حال مقادیر را در رابطه اولیه جای گذاری می کنیم. بر این اساس، داریم:

$$a = \frac{(128) \times (\frac{1/5}{0.64})}{10 \times 1/25} = 24 \text{ درصد}$$

بنابراین درصد جرمی حل شونده در این محلول برابر با ۲۴ خواهد بود. البته، برای محاسبه درصد جرمی هیدروژن یدید در این محلول، ابتدا می توانستیم جرم گاز هیدروژن یدید وارد شده به محلول را محاسبه کرده و در قدم بعد، درصد جرمی محلول را به دست بیاوریم. در این رابطه، داریم:

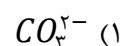
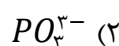
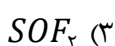
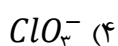
$$? g HI = 33/6 \text{ L HI} \times \frac{1 \text{ mol HI}}{22/4 \text{ L HI}} \times \frac{128 \text{ g HI}}{1 \text{ mol HI}} = 192 \text{ g}$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{192 \text{ g HI}}{640 \text{ mL محلول} \times \frac{1/25 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}}} \times 100 = 24 \text{ درصد}$$

با توجه به محاسبات انجام شده به روش دوم نیز درصد جرمی محلول برابر با ۲۴ درصد خواهد بود.



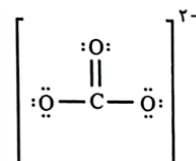
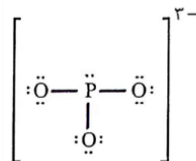
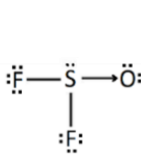
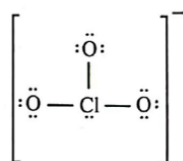
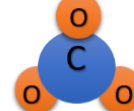
۵۸- ساختار فضایی کدام گونه، با سایر گونه ها متفاوت است؟



(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

ساختار لوویس و ساختار فضایی گونه های داده شده در شکل زیر، آمده است:



هنگامی که اتم مرکزی فاقد جفت الکترون ناپیوندی باشد، ساختار فضایی به صورت مسطح است اما اگر اتم مرکزی دارای جفت الکترون ناپیوندی باشد، ساختار فضایی آن از حالت مسطح خارج می شود. در این حالت، اگر در اطراف اتم مرکزی، ۳ اتم دیگر وجود داشته باشد، ساختار به صورت هرمی است که در شکل بالا نشان داده شده است اما اگر دو اتم دیگر پیرامون اتم مرکزی باشد، همانند ساختار آب، ساختار فضایی به صورت خمیده است. دقت کنید که اگر ۴ اتم پیرامون اتم مرکزی باشد و جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی نباشد، ساختار به صورت چهار وجهی است. به عنوان مثال یون سولفات یا متان، دارای ساختار فضایی چهار وجهی هستند. همان طور که در شکل بالا می بینید، ساختار فضایی یون کربنات به صورت مثلثی و مسطح است در صورتی که ساختار سایر یونها به صورت هرمی است؛ زیرا اتم های مرکزی آنها دارای جفت الکترون ناپیوندی است. دقت کنید که نام ساختارهای فضایی صرفاً برای فهم بهتر گفته شده و نیازی به حفظ کردن آنها نیست.





۵۹ - چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- الف - استخراج $NaCl$ و فلز منیزیم از آب دریا، به ترتیب به روش فیزیکی و شیمیایی است.
 ب - در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا، با عبور جریان برق از $Mg(OH)_2$ ، فلز منیزیم به دست می‌آید.
 ج - دریاچه ارومیه، یکی از دریاچه‌های شور دنیا است که مقدار نمک‌های حل شده در آن بسیار زیاد است.
 د - بیشتر آب‌های روی زمین شور است و نمی‌توان از آن‌ها در کشاورزی، مصارف خانگی و صنعتی استفاده کرد.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

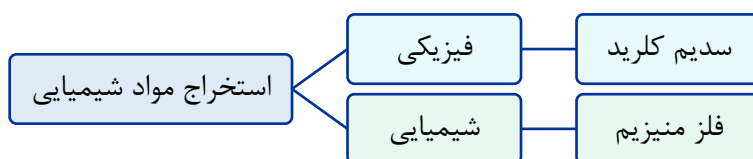
(آسان - حفظی - ۱۰۰۳)

موارد (الف)، (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف

استخراج $NaCl$ و فلز منیزیم از آب دریا، به ترتیب به روش فیزیکی (به صورت تبلور) و شیمیایی (واکنش با سایر مواد) است.

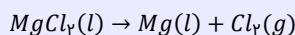


ب

در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا، با عبور جریان برق از $MgCl_2$ ، فلز منیزیم به دست می‌آید. به درسامه زیر، دقت کنید:

فلز منیزیم

فلز منیزیم ماده ارزشمند دیگری است که در تهیه آلیاژها، شربت معده و ... کاربرد دارد. یکی از منابع تهیه این فلز آب دریا است. منیزیم در آب دریا به شکل $Mg^{2+}(aq)$ وجود دارد. برای استخراج و جداسازی آن، در مرحله نخست منیزیم را به صورت ماده جامد و نامحلول $Mg(OH)_2$ رسوب می‌دهند، سپس آن را به منیزیم کلرید تبدیل می‌کنند. در پایان با استفاده از جریان برق، منیزیم کلرید مذاب را به عنصرهای سازنده آن تجزیه می‌کنند:



ج

دریاچه ارومیه، یکی از دریاچه‌های شور دنیا است که مقدار نمک‌های حل شده در آن بسیار زیاد است.

محلول

محلول، مخلوطی همگن از دو یا چند ماده است که حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی محلول در سرتاسر آن، یکسان و یکنواخت است.
 محلول‌ها می‌توانند به سه حالت وجود داشته باشند:

الف) گازی - هوا

ب) مایع - سرم فیزیولوژیک، ضدیخ (اتیلن گلیکول در آب)، گلاب (مخلوط همگن از چند ماده آلی در آب)

ج) جامد - سکه فلزی

برخی محلول‌ها رقیق و برخی غلیظ هستند که از جمله محلول‌های رقیق، سرم فیزیولوژیک را می‌توان نام برد. از جمله محلول‌های غلیظ گلاب دوآتشه، محلول نیتریک اسید ۷۰٪ جرمی، آب دریای مرده و آب دریاچه ارومیه را می‌توان مثال زد.

مقایسه غلظت آب چهار دریا:

اقیانوس آرام > دریای مدیترانه > دریای سرخ > دریای مرده

برای راحت‌تر به خاطر سپردن ترتیب نام دریاها، می‌توانید از رمز «مرده، در سرخی مدیترانه آرام گرفت» استفاده کنید.

د

بیشتر آب‌های روی زمین شور است و نمی‌توان از آن‌ها در کشاورزی، مصارف خانگی و صنعتی استفاده کرد.

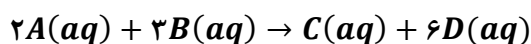




۶۰- دمای ۵۰۰ گرم محلول ۲۰ درصد جرمی A را از 20°C به 10°C می‌رسانیم تا محلولی سیر شده به دست آید. رسوب ایجاد شده را، در

ظرفی حاوی به تقریب چند گرم محلول سیر شده B در دمای 10°C ، بریزیم تا همه آن مصرف شود؟

($A = 200, B = 150: g \cdot mol^{-1}$)

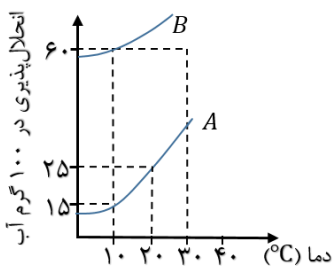


۱۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

۱۵۰ (۴)

۷۵ (۳)



(سخت - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

جرم نمک موجود در ۵۰۰ گرم محلول ۲۰ درصد جرمی نمک A برابر است با:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \rightarrow 20 = \frac{x}{500} \times 100 \rightarrow x = 100 \text{ g}$$

پس در دمای 20°C ، ۱۰۰ گرم نمک در ۴۰۰ گرم آب وجود دارد. با کاهش دمای محلول، مقداری نمک رسوب می‌کند. اکنون مقدار نمک در محلول سیر شده نمک A را در دمای 10°C محاسبه می‌کنیم. مطابق نمودار، در این دما، در ۱۰۰ گرم آب، ۱۵ گرم نمک A حل می‌شود؛ پس در ۴۰۰ گرم آب، ۶۰ گرم نمک حل می‌شود.

جرم آب	جرم نمک
۱۰۰	۱۵
۴۰۰	$x = 60$

بنابراین طی کاهش دما $40 = 100 - 60$ گرم نمک رسوب می‌کند.

اکنون با توجه به واکنش داده شده، مقدار نمک B مورد نیاز برای واکنش با ۴۰ گرم نمک A را به دست می‌آوریم:

$$? g B = 40 g A \times \frac{1 \text{ mol } A}{200 g A} \times \frac{3 \text{ mol } B}{2 \text{ mol } A} \times \frac{150 g B}{1 \text{ mol } B} = 45$$

با توجه به نمودار، در دمای 10°C ، ۶۰ گرم نمک B در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود؛ پس به تقریب ۴۵ گرم از آن، در ۷۵ گرم آب حل می‌شود.

جرم آب	جرم نمک
۱۰۰	۶۰
$x = 75$	۴۵

بنابراین جرم محلول مورد نیاز به تقریب برابر با $120 = 75 + 45$ گرم است.



۶۱- یون‌های A, B, C و D به ترتیب کاتیون‌های فراوان آب دریا هستند. کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

(۱) همه این یون‌ها، تک اتمی بوده و با افزایش عدد اتمی، فراوانی آن‌ها نیز، افزایش می‌یابد.

(۲) در فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از یون C و یون سولفات، ۷ اتم وجود دارد.

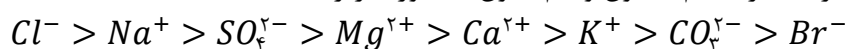
(۳) در نام‌گذاری ترکیبات یونی حاصل از یون D ، ذکر ظرفیت کاتیون، ضروری است.

(۴) آرایش الکترونی یون‌های A و B مشابه یکدیگر است.

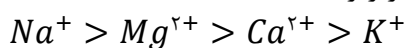
(متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

ترتیب مقدار یون‌های موجود در آب دریا (هم کاتیون و هم آنیون) به صورت زیر است:



مقایسه کاتیون‌ها و آنیون‌ها، به صورت جداگانه نیز در زیر آمده است:



پس یون‌های A, B, C و D به ترتیب Na^{+}, Mg^{2+}, Ca^{2+} و K^{+} هستند.





بررسی گزینه‌ها:

- ۱) همه یون‌های مورد نظر تک اتمی هستند اما نمی‌توان گفت با افزایش عدد اتمی، فراوانی آن‌ها افزایش می‌یابد؛ زیرا سدیم عدد اتمی کمتری نسبت به سایر یون‌ها دارد اما فراوانی بیشتری نیز دارد.
- ۲) فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از یون Ca^{2+} و یون سولفات به صورت $CaSO_4$ است و دارای ۶ اتم می‌باشد.
- ۳) یون پتاسیم تنها دارای یک ظرفیت است و در نام‌گذاری ترکیبات آن، نیازی به ذکر ظرفیت کاتیون نیست.
- ۴) آرایش الکترونی هر دو یون Na^+ و Mg^{2+} مشابه آرایش الکترونی گاز نجیب نئون است.



۶۲- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- ۱) زیست‌کره شامل جانداران روی کره زمین است که در واکنش‌های آن‌ها درشت مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.
- ۲) اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع حدود ۲ متر می‌پوشاند.
- ۳) سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره وارد آب‌کره می‌شوند.
- ۴) جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است.

(متوسط - حفظی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر و نه ۲ متر، می‌پوشاند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) زیست‌کره شامل جانداران روی کره زمین است که در واکنش‌های آن‌ها درشت مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.

آب‌کره	آب دریا بخار می‌شود.	هواکره
هواکره	بارش	آب‌کره و سنگ‌کره
سنگ‌کره	مواد شیمیایی جامد به صورت گرد و غبار	هواکره



- ۳) سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره وارد آب‌کره می‌شوند. از آن‌جا که جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است، پس باید همین مقدار ماده نیز از آب دریاها و اقیانوس‌ها خارج شود.
- ۴) جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است.





- ۶۳- دو محلول ۸۰٪ جرمی و ۶۰٪ جرمی منیزیم سولفات با هم مخلوط می‌شوند. اگر جرم محلول اول، ۳ برابر جرم محلول دیگر باشد، درصد جرمی یون منیزیم در محلول نهایی کدام است؟ ($S = 32, Mg = 24, O = 16 : g.mol^{-1}$)
- ۷۵ (۱) ۷۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۴ (۴)

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

جرم یکی از محلول‌ها را برابر با x در نظر گرفته و جرم محلول دیگر را برابر با $3x$ در نظر می‌گیریم. در گام اول، درصد جرمی منیزیم سولفات را در محلول نهایی محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{(3x \times 80) + (x \times 60)}{(3x + x)} = \frac{(240x + 60x)}{4x} = \frac{300x}{4x} = 75\%$$

در گام بعد، درصد جرمی منیزیم را در محلول مورد نظر به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{درصد جرمی منیزیم}}{\text{درصد جرمی سولفات}} = \frac{\text{جرم مولی منیزیم}}{\text{جرم مولی منیزیم سولفات}} \Rightarrow \frac{\text{درصد جرمی منیزیم}}{75} = \frac{24}{120} \Rightarrow \text{درصد جرمی منیزیم} = 15\%$$



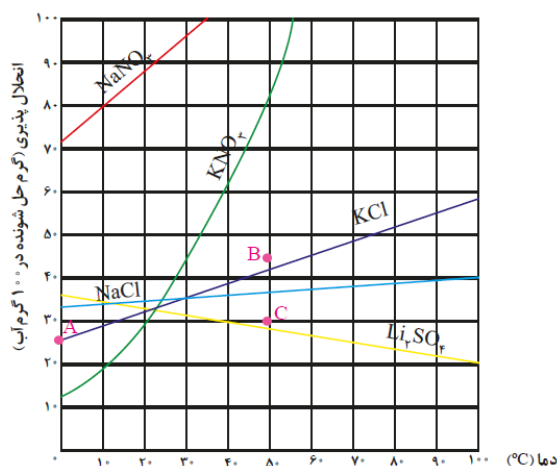
- ۶۴- تأثیر دما بر انحلال‌پذیری کدام یک از نمک‌های KNO_3 ، $NaCl$ ، Li_2SO_4 و KCl بیشتر از سایر نمک‌ها بوده و در ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول ۲ مولار آن، چند مول یون وجود دارد؟

- ۰/۸ - Li_2SO_4 (۱)
۰/۴ - KNO_3 (۲)
۰/۸ - KNO_3 (۴)
۱/۲ - Li_2SO_4 (۳)

(آسان - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

هر چه شیب نمودار انحلال‌پذیری ماده‌ای بیشتر باشد (بدون در نظر گرفتن صعودی یا نزولی بودن آن)، تأثیر دما بر انحلال‌پذیری آن نیز، بیشتر است. در میان مواد داده شده، شیب نمودار انحلال‌پذیری KNO_3 بیشتر از سایر نمک‌ها است.



هر مول KNO_3 دارای دو مول یون است. پس داریم:

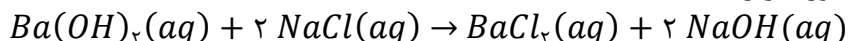
$$200 \text{ ml محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ ml}} \times \frac{2 \text{ mol } KNO_3}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol } KNO_3} = 0.8$$



- ۶۵- با مخلوط کردن کدام دو محلول، رسوب نمکی تشکیل نمی‌شود؟

- (۱) محلول نقره نیترات و محلول آهن(III) کلرید
(۲) محلول کلسیم یدید و محلول پتاسیم فسفات
(۳) محلول باریم هیدروکسید و محلول آمونیوم سولفات
(۴) محلول باریم هیدروکسید و محلول سدیم کلرید

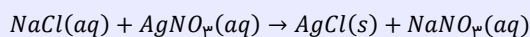
واکنش محلول باریم هیدروکسید و محلول سدیم کلرید به صورت زیر است:



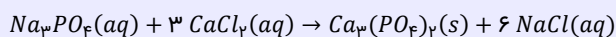
در این واکنش هیچ رسوبی تشکیل نمی شود. به درسامه زیر دقت کنید.

شناسایی یون ها

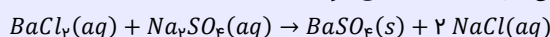
برای شناسایی یون Cl^- از محلول دارای یون Ag^+ استفاده می شود.



برای شناسایی یون Ca^{2+} از محلول دارای یون PO_4^{3-} استفاده می شود.



برای شناسایی یون Ba^{2+} از محلول دارای یون SO_4^{2-} استفاده می شود.



تمامی محلول های موجود در واکنش های بالا، بی رنگ و تمامی رسوب های بالا، سفید رنگ هستند.

بررسی گزینه ها:

- ۱) برای تشکیل نمک نامحلول نقره کلرید، کافی است محلولی دارای یون نقره (بدون توجه به آنیون آن) و محلولی دارای یون کلرید (بدون توجه به کاتیون آن) داشته باشیم.
- ۲) برای تشکیل نمک نامحلول کلسیم فسفات، کافی است محلولی دارای یون کلسیم (بدون توجه به آنیون آن) و محلولی دارای یون فسفات (بدون توجه به کاتیون آن) داشته باشیم.
- ۳) برای تشکیل نمک نامحلول باریم سولفات، کافی است محلولی دارای یون باریم (بدون توجه به آنیون آن) و محلولی دارای یون سولفات (بدون توجه به کاتیون آن) داشته باشیم.
- ۴) برای تشکیل نمک نامحلول نقره کلرید، کافی است محلولی دارای یون نقره (بدون توجه به آنیون آن) و محلولی دارای یون کلرید (بدون توجه به کاتیون آن) داشته باشیم.



۶۶- معادله انحلال پذیری نمکی به صورت $S = 1/5\theta + 30$ است. ۳۸۰ گرم مخلوط ۴۷/۳ درصد جرمی این نمک، در دمای $20^\circ C$ موجود است. به تقریب دمای مخلوط را چند درجه افزایش دهیم تا محلولی سیر شده به دست آید؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۵

ابتدا جرم نمک موجود در ۳۸۰ گرم محلول ۴۷/۳ درصد جرمی را به دست می آوریم:

$$g = 180 \approx 179/7 = \frac{x}{380} \times 100 = 47/3 \rightarrow \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \text{درصد جرمی}$$

بنابراین در ۳۸۰ گرم محلول، ۱۸۰ گرم نمک و ۲۰۰ گرم آب وجود دارد. اگر بخواهیم با افزایش دما، محلولی سیر شده به دست آوریم، یعنی در ۲۰۰ گرم آب، ۱۸۰ گرم نمک حل شود، یعنی انحلال پذیری نمک مورد نظر در ۱۰۰ گرم آب، باید ۹۰ گرم باشد. پس با استفاده از معادله داده شده، دمایی را که انحلال پذیری برابر با ۹۰ گرم باشد، به دست می آوریم:

$$S = 1/5\theta + 30 \xrightarrow{S=90} 90 = 1/5 \times \theta + 30 \rightarrow \theta = 40^\circ C$$

پس دمای محلول را باید به $40^\circ C$ برسانیم. به عبارتی $20^\circ C$ افزایش دما دهیم.



۶۷- نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب سمت راست، با نسبت شمار کاتیون به آنیون در ترکیب سمت چپ در کدام گزینه یکسان است؟

- ۱) آهن (II) فسفات - کلسیم اکسید
۲) آلومینیم کربنات - منیزیم فسفات
۳) کروم (II) سولفات - آمونیوم سولفید
۴) آمونیوم فسفید - روی نیتريد

- ۱) آهن (II) فسفات - کلسیم اکسید
۲) آلومینیم کربنات - منیزیم فسفات
۳) کروم (II) سولفات - آمونیوم سولفید
۴) آمونیوم فسفید - روی نیتريد



(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه نسبت شمار آنیون به کاتیون، کافی است بدون نوشتن فرمول شیمیایی ترکیب، بار کاتیون را به بار آنیون تقسیم کنیم:

$$\frac{\text{بار کاتیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{بار آنیون}}$$

به فرمول شیمیایی و بار یون‌های چند اتمی دقت کنید:

فرمول شیمیایی	یون چند اتمی
PO_4^{3-}	فسفات
CO_3^{2-}	کربنات
OH^-	هیدروکسید
NO_3^-	نیتрат
SO_4^{2-}	سولفات
NH_4^+	آمونیم

برای محاسبه نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب آلومینیم کربنات، بار کاتیون آلومینیم (۳) را به بار آنیون کربنات (۲) تقسیم می‌کنیم که برابر با $\frac{۳}{۲}$ است. هم‌چنین برای محاسبه نسبت شمار کاتیون به آنیون در ترکیب منیزیم فسفات، بار آنیون فسفات (۳) را به بار کاتیون منیزیم (۲) تقسیم می‌کنیم که این مقدار نیز برابر با $\frac{۳}{۲}$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به توضیحات داده شده می‌توان نوشت:

آهن (II) فسفات: ↺	کلسیم اکسید: ↺
$\frac{\text{بار کاتیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۲}{۳}$	$\frac{\text{بار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۲}{۲} = ۱$

پس نسبت‌های خواسته شده با هم برابر نیستند.

۳) نسبت‌های خواسته شده در ترکیب‌های این گزینه نیز، با هم برابر نیستند.

کروم (II) سولفات: ↺	آمونیم سولفید (یون سولفید به صورت S^{2-} است): ↺
$\frac{\text{بار کاتیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۲}{۲} = ۱$	$\frac{\text{بار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۲}{۱} = ۲$

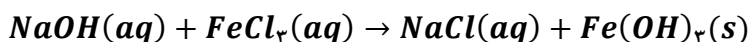
۴) نسبت‌های خواسته شده در ترکیب‌های این گزینه نیز، با هم برابر نیستند.

آمونیم فسفید (یون فسفید به صورت P^{3-} است): ↺	روی نیتريد (یون نیتريد به صورت N^{3-} است): ↺
$\frac{\text{بار کاتیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۱}{۳}$	$\frac{\text{بار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{بار آنیون}} = \frac{۳}{۲}$



۶۸- ۲۰۰ گرم محلول سدیم هیدروکسید با غلظت ۲۰۰ ppm ، با چند مول آهن (III) کلرید، مطابق واکنش موازنه نشده زیر، واکنش می‌دهد؟

$$(H = ۱, Na = ۲۳, O = ۱۶ \text{ g.mol}^{-1})$$



$$\frac{1}{3} \times 10^{-2} \text{ (۴)}$$

$$10^{-3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \times 10^{-3} \text{ (۲)}$$

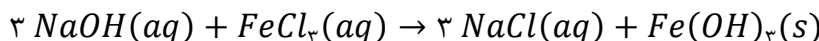
$$10^{-2} \text{ (۱)}$$



(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



اکنون جرم سدیم هیدروکسید موجود در محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت ppm} = \frac{\text{جرم نمک (g)}}{\text{جرم محلول (g)}} \times 10^6 \rightarrow 200 = \frac{x}{200} \times 10^6 \rightarrow x = 0.04 \text{ g}$$

حال مول آهن (III) کلرید مصرفی را به دست می‌آوریم:

$$n \text{ mol FeCl}_3 = 0.04 \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol FeCl}_3}{3 \text{ mol NaOH}} = \frac{1}{3} \times 10^{-3}$$

پس در واکنش انجام شده، $10^{-3} \times \frac{1}{3}$ مول FeCl_3 مصرف می‌شود.



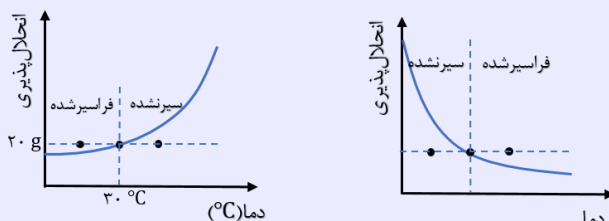
۶۹- برای تبدیل محلول فراسیرشده به محلول سیر شده آن، باید

- (۱) لیتیم سولفات - دما را افزایش دهیم.
- (۲) سدیم نیترات - مقداری از آب را با حرارت تبخیر کنیم.
- (۳) پتاسیم کلرید - دما را افزایش دهیم.
- (۴) پتاسیم نیترات - محلول را با محلول سیر شده آن مخلوط کنیم.

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

محلول‌های فراسیرشده و سیرنشده



موادی که نمودار انحلال‌پذیری آن‌ها صعودی است (نمودار سمت چپ)، با افزایش و کاهش دمای محلول سیر شده آن‌ها، به ترتیب به محلول سیرنشده و فراسیرشده تبدیل می‌شوند. به عنوان مثال، اگر ۲۰ گرم از ماده‌ای در دمای ۳۰ °C، در ۱۰۰ گرم آب حل شود و محلول سیرشده‌ای به دست آید، در دماهای بالای ۳۰ °C محلولی سیرنشده است. همچنین در دماهای پایین‌تر از ۳۰ °C، محلولی فراسیرشده است. موادی که نمودار انحلال‌پذیری آن‌ها نزولی است (نمودار سمت راست)، با افزایش و کاهش دمای محلول سیر شده آن‌ها، به ترتیب به محلول فراسیرشده و سیرنشده تبدیل می‌شوند.

نمودار انحلال‌پذیری پتاسیم کلرید به صورت صعودی است. پس برای حل شدن مقدار اضافی آن، باید دمای محلول را افزایش داد تا انحلال‌پذیری افزایش یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) نمودار انحلال‌پذیری لیتیم سولفات به صورت نزولی است. پس برای حل شدن مقدار اضافی آن، باید دمای محلول را کاهش داد تا انحلال‌پذیری افزایش یابد.
- (۲) با تبخیر آب، محلول غلیظ‌تر می‌شود. برای حل شدن مقدار اضافی نمک، باید آب بیشتری به محلول اضافه شود.
- (۴) در دمای ثابت، افزودن محلولی سیرنشده از نمک مورد نظر، می‌تواند باعث تهیه محلول سیر شده شود اما افزودن محلولی سیرشده به محلولی فراسیرشده، همچنان محلول نهایی را به صورت فراسیرشده نگه می‌دارد.



۷۰- دو ظرف حاوی یک لیتر محلول ۳ مولار نمک A موجود است. ظرف اول را گرما می‌دهیم تا ۴۰۰ میلی‌لیتر از آب موجود در آن، تبخیر شود. به محلول موجود در ظرف دوم، ۲۰۰ میلی‌لیتر آب می‌افزاییم. مولاریته محلول ظرف اول چند برابر ظرف دوم می‌شود؟

۲/۵ (۴)

۳ (۳)

۱/۵ (۲)

۲ (۱)



(آسان - مسئله - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

در یک لیتر از محلول ۳ مولار نمکی، ۳ مول نمک وجود دارد. اگر حجم محلول کاهش یابد و به ۰/۶ لیتر برسد، مولاریته محلول جدید برابر است با:

$$\text{مولاریته} = \frac{\text{نمک } 3 \text{ mol}}{\text{محلول } 0.6 \text{ L}} = 5$$

به محلول موجود در ظرف دوم، ۲۰۰ میلی لیتر آب می افزاییم و حجم آن به ۱/۲ لیتر می رسد. پس مولاریته کاهش می یابد و به $\frac{5}{2}$ می رسد:

$$\text{مولاریته} = \frac{\text{نمک } 3 \text{ mol}}{\text{محلول } 1.2 \text{ L}} = \frac{5}{2}$$

نسبت مولاریته دو محلول برابر است با:

$$\frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$$



آرشیو آزمون های الکترونیکی

ماز را در دیجی ماز بخوانید!

سال
۱۴۰۴-۱۴۰۳



منو اسکن کن

